MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN
L. SCHMETTERER
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

65. BAND, 2. HEFT
MIT 12 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM APRIL 1961)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I, Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

65. Band./2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Watermann, D. A Tangential Tauberian Theorem 101

Barner, M. und **Kunle, H.** Über W-Kurven auf Quadriken 106

Zaubek, O. Eine Bemerkung zum Wilsonschen Satze 143

Szász, F. Die Abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale erfüllen 150

Schmidt, W. Zur Lagerung kongruenter Körper im Raum 154

Mirsky, L. Majorization of Vectors and Inequalities for Convex Functions 159

Weier, J. Über die Rotation von Tensorfeldern 170

Buchbesprechungen 183

A Tangential Tauberian Theorem

By

Daniel Waterman, Milwaukee, Wis., USA

(Received October 22, 1959)

There are many theorems of a Tauberian nature associating the existence of a limit of an analytic function $\Sigma a_n z^n$, as $z \to 1$ along some curve C in $|z| < 1$, with the convergence of Σa_n. One such is the well-known result of *Hardy* and *Littlewood* [1, p. 476; 2, p. 55] which asserts that if the ordinate of C is monotone decreasing as $z \to 1$ and $a_n = o(1/n)$, then Σa_n converges, no matter how steep C may be.

It would seem reasonable that this theorem have a generalization to the case of the Laplace-Stieltjes transform or the Dirichlet series, the only question being the exact nature of the Tauberian condition to be employed.

It is our intent to make this generalization. We shall give two conditions, one of which is seemingly "natural" in that it enables us to argue in a straight forward manner entirely analogous to that of *Hardy* and *Littlewood*. The other is much weaker and leads to a more difficult argument.

Let $\Phi(x)$ denote a real or complex valued function over $x \geqq 0$ which is of bounded variation in every closed interval. The variation of Φ in $[a, b]$ is denoted by $V(\Phi : [a, b])$.

If

$$\sup_{0 < h \leq 1} |\Phi(x + h) - \Phi(x)| = o(1/x),$$

Φ is said to satisfy *condition A*. If

$$V(\Phi : [x, x + 1]) = o(1/x),$$

we will say that Φ satisfies *condition B*. That Φ satisfies *condition B* implies Φ satisfies *condition A* is clear.

If $s = \sigma + i t$, then let

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, d\Phi(x)$$

be a function which is regular in the right half-plane $\sigma > 0$. C will be a curve in this half-plane with monotone decreasing ordinate as $\sigma \to 0+$ and terminating at $0 + i\,t_0$.

We establish the following theorem:

If $\lim f(s)$ exists as s approaches $0 + i\,t_0$ on C, and Φ satisfies condition A, then

$$\int_0^\infty e^{-it_0 x}\, d\Phi(x)$$

converges to the value $\lim f(s)$.

In our proof we may assume that $\lim f(s)$ and t_0 are zero. We shall first consider the case in which Φ satisfies *condition B*.

Let α, β be two points on C, $\Im(\alpha) > \Im(\beta)$. Then

$$\int_{C\,\alpha}^{\beta} f(s)\, ds = \int_{C\,\alpha}^{\beta} \int_0^\infty e^{-sx}\, d\Phi(x)\, ds = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, d\Phi(x).$$

Thus

$$\int_{C\,\alpha}^{0} f(s)\, ds = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - 1}{x}\, d\Phi(x) = \int_0^{\frac{1}{|\alpha|}} \frac{e^{-\alpha x} - 1}{x}\, d\Phi(x) + \int_{\frac{1}{|\alpha|}}^\infty \frac{e^{-\alpha x} - 1}{x}\, d\Phi(x).$$

Clearly

$$\left| \int_\alpha^0 f(s)\, ds \right| < \operatorname*{Sup}_C |f(s)| \cdot \int_{C\,\alpha}^0 |ds| = o(1) \cdot 0(\alpha) = o(\alpha),$$

and

$$\left| \int_{\frac{1}{|\alpha|}}^\infty \frac{e^{-\alpha x} - 1}{x}\, d\Phi(x) \right| \leqq 2 \int_{\frac{1}{|\alpha|}}^\infty \frac{|d\Phi(x)|}{x} = 2 \sum_{k=0}^\infty \int_{\frac{1}{|\alpha|}+k}^{\frac{1}{|\alpha|}+k+1} \frac{|d\Phi(x)|}{x} \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{k=0}^\infty V\left(\Phi : \left[\frac{1}{|\alpha|} + k, \frac{1}{|\alpha|} + k + 1\right]\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{|\alpha|} + k\right)} = o(\alpha).$$

Thus

$$\int_0^{\frac{1}{|\alpha|}} \frac{e^{-\alpha x} - 1}{x}\, d\Phi(x) = o(\alpha).$$

Consider now

$$\left| \int_0^{\frac{1}{|a|}} d\Phi(x) + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{1}{|a|}} \frac{e^{-ax}-1}{x}\, d\Phi(x) \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{|a|}} \frac{e^{-ax}-1+ax}{ax}\, d\Phi(x) \right|$$

$$\leqq \int_0^{\frac{1}{|a|}} |a|\,|x|\,|d\Phi(x)| = o(1).$$

Thus

$$\int_0^{\frac{1}{|a|}} d\Phi(x) = o(1) \text{ as } |a| \to 0$$

and the result has been established for Φ satisfying *condition B*.

Before we proceed with the argument which establishes the result under *condition A* we shall make one additional assumption. It entails no loss of generality to assume that there exists $\delta > 0$ such that

$$\Phi(x) = 0 \text{ if } x \,\varepsilon [0, \delta],$$

for otherwise if $\eta > 0$

$$f(s) = \left(\int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{\infty} \right) e^{-sx}\, d\Phi(x) = f_1(s) + f_2(s).$$

Now

$$\lim_{s \to 0 + it_0} f_1(s) = \int_0^{\eta} e^{-it_0 x}\, d\Phi(x)$$

and we need only show that

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-it_0 x}\, d\Phi(x)$$

converges.

Let

$$\Phi_1 = \Re(\Phi), \quad \Phi_2 = \Im(\Phi).$$

Proceeding in a purely formal manner we may write

$$\int_0^{\infty} e^{-itx}\, d\Phi(x) = \int_0^{\infty} (\cos tx\, d\Phi_1(x) + \sin tx\, d\Phi_2(x))$$

$$+ i \int_0^{\infty} (\cos tx\, d\Phi_2(x) - \sin tx\, d\Phi_1(x))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\psi(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (i \operatorname{sign} x)\, d\psi(x)$$

where

$$\psi(x) = (\Phi_1 - i\,\Phi_2)/2$$

and $\Phi_1(x)$ and $\Phi_2(x)$ are extended to $(-\infty, 0)$ in an odd and even manner respectively. It is clear that ψ will satisfy *condition A* if Φ does.

Let

$$\Psi(x) = -\int_{-\infty}^{x} y^{-2}\, d\psi(y)$$

and

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Psi(x).$$

It is easily seen by an integration by parts that

$$\sup_{0<h\leq 1} |\,\Psi(x+h) - \Psi(x)\,| = o(|\,x\,|^{-3}).$$

Suppose $-\pi < a < \alpha < \beta < b < \pi$. Let $\lambda(t)$ be a function of class C^p (p sufficiently large) and period 2π such that

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 \text{ in } (\alpha, \beta) \\ 0 \text{ in } [-\pi, \pi] - [a, b]. \end{cases}$$

Consider the Fourier series of $F(t)\cdot\lambda(t)$. It may be shown that its coefficients are $o(n^{-3})$. The second formal derivative of this series we denote by

$$\Sigma\, b_n\, e^{int}$$

where

$$b_n = o(1/n).$$

Using a result of *Zygmund* [3] on the equiconvergence of trigonometric series and integrals we have

$$\sum_{|\,n\,|<\omega} b_n\, e^{int} - \int_{-\omega}^{\omega} e^{itx}\, d\psi(x) \to 0$$

and

$$i \sum_{|\,n\,|<\omega} (\operatorname{sign} n)\, b_n\, e^{int} - i \int_{-\omega}^{\omega} e^{itx}\, (\operatorname{sign} x)\, d\,\psi(x) \to \text{finite value}$$

uniformly in $[\alpha, \beta]$ as $\omega \to \infty$.

Consider the function

$$g(re^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n\, e^{int}\, r^{|n|\,t} + i \sum_{-\infty}^{\infty} (-i \operatorname{sign} n)\, b_n\, e^{int}\, r^{|n|\,t} = \sum_{0}^{\infty} c_n\, z^n$$

where $z = re^{it}$. This defines a function analytic in $|\,z\,| < 1$ and such that

$$c_n = o(1/n).$$

Clearly the above relation between the series and integrals implies the existence of $\lim g(z)$ as $z \to 1$ along C', a curve in the unit circle which corresponds to C and satisfies the requirements of the Hardy-Littlewood theorem. Applying this theorem, the series

$$\sum_0^\infty c_n e^{int},$$

converges. The equiconvergence and equiconvergence in the wider sense of its real and imaginary parts with the integrals given above completes the demonstration.

Reference

[1] *G. H. Hardy* and *J. E. Littlewood*, Contributions to the arithmetic theory of series. Proc. Lond. Math. Soc., **11** (1913), 411—478.

[2] *E. Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin, 1929.

[3] *A. Zygmund*, On trigonometric integrals. *Ann. Math.*, **48** (1947), 393—440.

Über W-Kurven auf Quadriken

Von

Martin Barner, Karlsruhe und **Heinz Kunle**, Freiburg i. Br.

Mit 12 Textabbildungen

(Eingegangen am 15. April 1960)

W-Kurven, d. h. Bahnkurven eingliedriger Gruppen von Projektivitäten, sind seit *Klein* und *Lie* [4] häufig betrachtet worden, insbesondere waren die ebenen W-Kurven bald vollständig bekannt (*Klein* und *Lie* [5]). Aber auch den interessanteren und vielgestaltigen W-Kurven in drei und mehr Dimensionen haben sich viele Autoren zugewandt (man vgl. etwa [6], [7], [8] und besonders [10]), so daß die erneute Beschäftigung mit diesem Thema einer Erläuterung bedarf.

Unser Ausgangspunkt sind die beiden bekannten Sätze: 1. *Eine Komplexkurve auf einer Quadrik ist W-Kurve.* 2. *Eine W-Komplexkurve liegt auf einer Quadrik*[1]. Man wird sich also fragen, ob eine W-Kurve auf einer Quadrik stets auch Komplexkurve ist. Da sich herausstellt, daß dies nicht zutrifft, wird man weiterhin eine vollständige Aufzählung aller W-Kurven auf Quadriken anstreben, um den Sachverhalt völlig zu klären.

K. Strubecker hat sich um 1930 in mehreren Arbeiten [12], [13], [14] mit solchen eingliedrigen Gruppen von Projektivitäten beschäftigt, die die Quadriken eines Büschels mit einem nichtentarteten reellen oder imaginären Vierseit als Grundkurve festlassen („nichteuklidische Schraubungen" als projektive Analoga der euklidischen Schraubungen). Die Bahnkurven dieser Gruppen liegen auf den genannten Fixquadriken und sind in der Tat Komplexkurven, wie in [12] gezeigt ist.

Auch im Anschluß an diese *Strubecker*schen Arbeiten erscheint also eine vollständige Klassifikation aller W-Kurven auf Quadriken

[1] *G. H. Halphen*, Oeuvres III, S. 478 und 487. Für neuere Beweise vgl. man *G. Bol* [3], S. 230. — Komplexkurve heißt eine Kurve, deren Tangenten einem linearen Geradenkomplex angehören.

wünschenswert, die sich dann auch auf solche Gruppen (nichteuklidische Schraubungen) erstreckt, bei denen das erwähnte Vierseit gemischt reell-imaginär oder aber entartet ist[1a]. Es zeigt sich, daß W-Kurven auf nichtentarteten Quadriken stets Komplexkurven sind, daß dies dagegen für Kegel nicht mehr zuzutreffen braucht. Abgesehen von der Raumkurve dritter Ordnung und jener vierter Ordnung mit Spitze, die Sonderstellungen einnehmen, ergeben sich zwölf Typen von W-Quadrikkurven, unter ihnen die euklidische Schraublinie und die drei ausführlich von *Strubecker* betrachteten Fälle. Es ist nur natürlich, daß sich dabei viele bekannte Resultate und Kurven wiederfinden.

Man könnte die gestellte Aufgabe etwa durch vollständige Aufzählung aller W-Kurven überhaupt (vgl. *E. Schubarth* [10]) und Aussonderung der Quadrikkurven unter ihnen zu lösen suchen. Statt dieses langwierigen und dem Problem unangemessenen Weges gehen wir direkt vor und benutzen dazu die Methoden der projektiven Raumkurventheorie von *G. Bol* [3], die sich der Fragestellung leicht anpassen lassen und die im Gegensatz zum oben skizzierten Verfahren die gesuchten Kurven unmittelbar und systematisch zu erfassen gestatten. Neben deren Kennzeichnung durch ihre Invarianten werden auch die Differentialgeometrie einiger spezieller Kurven und die gestaltlichen Verhältnisse besonders berücksichtigt.

Unsere Betrachtungen enthalten bei geeigneter Deutung auch die W-Kurven der ebenen Möbius- und Laguerre-Geometrie (vgl. *Blaschke* [2] sowie [9], [11]).

Herrn Rolf Walter, Karlsruhe, haben wir für Hilfe bei der Anfertigung der Figuren und wertvolle Hinweise zu danken.

1. W-Kurven. Einer Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des dreidimensionalen projektiven Raumes läßt sich bei geeigneter Normierung und beliebiger Parameterverteilung ein Bezugssystem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zuordnen, für das Ableitungsgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' &= 3a\,\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \\ \mathfrak{y}' &= b\,\mathfrak{x} + 4a\,\mathfrak{t} + \mathfrak{z} \\ \mathfrak{z}' &= c\,\mathfrak{x} + b\,\mathfrak{t} + 3a\,\mathfrak{y} \end{aligned} \tag{1.1}$$

[1a] Mit dieser Frage hat sich bereits *W. Wunderlich* 1933 in einer unveröffentlicht gebliebenen Arbeit „Schraubungen in nichteuklidischen Räumen" (Lehramtsprüfungs-Hausarbeit) beschäftigt, wie uns erst während der Drucklegung dieser Note bekannt wurde. Man vgl. auch [15], [16], [17].

gelten[2]. Beim Übergang zu einem anderen Parameter t^* durch

$$t = f(t^*), \quad \frac{dt^*}{dt} = \varphi, \quad A = \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{1.2}$$

transformieren sich die in (1.1) auftretenden Größen a, b, c und Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gemäß

$$\begin{aligned} a^* &= \varphi^{-2}(a + A' - A^2) \\ b^* &= \varphi^{-3} b \\ c^* &= \varphi^{-4} c \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^* &= \varphi^{0/1}\ \mathfrak{x} \\ \mathfrak{t}^* &= \varphi^{1/1}\ (\mathfrak{t} + 3A\,\mathfrak{x}) \\ \mathfrak{y}^* &= \varphi^{-1/1}(\mathfrak{y} + 4A\,\mathfrak{t} + 6A^2\,\mathfrak{x}) \\ \mathfrak{z}^* &= \varphi^{-2/1}(\mathfrak{z} + 3A\,\mathfrak{y} + 6A^2\,\mathfrak{t} + 6A^3\,\mathfrak{x}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Man kann deshalb für $b \neq 0$ durch $b^* = \text{const}$ auf der Kurve einen mit ihr projektivinvariant verknüpften Parameter erklären. Das zugehörige Bezugssystem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ist dann ebenfalls der Kurve in projektivinvarianter Weise zugeordnet.

Die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ gestattet genau dann eine eingliedrige Gruppe von Projektivitäten in sich, wenn bezogen auf diesen invarianten Parameter für jedes τ

$$a(t + \tau) = a(t), \quad b = \text{const}, \quad c(t + \tau) = c(t) \tag{1.5}$$

ist, wenn also gilt

$$a = \text{const}, \ b = \text{const}, \ c = \text{const}. \tag{1.6}$$

Ist $b = 0$ (die Kurve ist dann *Komplexkurve*[2], d. h. die Tangenten der Kurve gehören einem linearen Komplex an), so kann man nach Einführung eines projektivinvarianten Parameters, für den $c = \text{const} \neq 0$ ist, entsprechend auf $a = \text{const}$ schließen. Ist schließlich $b = c = 0$ (die Kurve ist jetzt *Raumkurve dritter Ordnung*), so kann man nach (1.3) aber auch $a = 0$ erreichen.

Kurven, die eine eingliedrige Gruppe von Projektivitäten gestatten, heißen bekanntlich *W-Kurven*, und wir haben: *Eine Kurve ist genau dann W-Kurve, wenn bei geeigneter Parameterverteilung* (1.6) *gilt.* Im folgenden nehmen wir stets (1.6) an und nennen einen zugehörigen Parameter dann einen *W-Parameter* der *W*-Kurve.

---

[2] Zu den verwendeten Formeln der projektiven Kurventheorie vgl. man *G. Bol* [3], Abschnitt III.

Durch (1.6) ist nun ein W-Parameter noch nicht eindeutig festgelegt. Ist etwa $b \neq 0$, so läßt sich zunächst nach (1.3) ein W-Parameter so wählen, daß b einen vorgegebenen reellen Zahlwert annimmt; von dieser Möglichkeit werden wir öfter Gebrauch machen. Alle anderen „zulässigen" W-Parameter t^* mit $b^* = b$ sind dann gegeben durch $\varphi = 1$, also nach (1.2) durch

$$t^* = t + \tau, \qquad \tau = \text{const.} \tag{1.7}$$

Ist aber $b = 0$, jedoch $c \neq 0$, so kann man c einen bestimmten Wert erteilen. Die jetzt noch zulässigen W-Parameter t^* mit $c^* = c$, also mit $\varphi = \pm 1$, sind

$$t^* = \pm t + \tau. \tag{1.7'}$$

Ist schließlich $b = c = 0$ und hat man einen W-Parameter mit $a = 0$ gewählt, so gilt für die zulässigen Parametertransformationen $A' = A^2$, also

$$t^* = \frac{\varkappa_0 t + \varkappa_1}{\varkappa_2 t + \varkappa_3}, \quad \varkappa_k = \text{const}, \quad \varkappa_0 \varkappa_3 - \varkappa_1 \varkappa_2 \neq 0. \tag{1.7''}$$

Durch (1.7), (1.7'), (1.7'') *wird jeweils die Gruppe von Projektivitäten dargestellt, die die Kurve gestattet.* Für Raumkurven dritter Ordnung und nur für sie ist also die Gruppe, wie bekannt, dreigliedrig.

Bei nichtkubischen W-Komplexkurven zerfällt die eingliedrige Gruppe nach (1.7') in zwei Scharen von Projektivitäten. Betrachten wir aus der zweiten Schar etwa die durch $t^* = -t$ dargestellte Projektivität, so erkennt man aus (1.4), daß $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor in $\mathfrak{x}$, $-\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $-\mathfrak{z}$ übergehen; das Bild eines beliebigen Punktes

$$\mathfrak{p} = p_0 \mathfrak{x} + p_1 \mathfrak{t} + p_2 \mathfrak{y} + p_3 \mathfrak{z} \tag{1.8}$$

ist also

$$\hat{\mathfrak{p}} = p_0 \mathfrak{x} - p_1 \mathfrak{t} + p_2 \mathfrak{y} - p_3 \mathfrak{z}. \tag{1.8'}$$

Die zweite Schar von Projektivitäten $t^* = -t + \tau$ einer W-Komplexkurve besteht demnach aus Projektivspiegelungen an zwei windschiefen Geraden[3]. *Diese Geraden sind die „Relativhauptnormalen"* ($\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$) *und die „Achsen"* ($\mathfrak{t}\,\mathfrak{z}$) *des zu einem beliebigen W-Parameter gehörigen Bezugssystems an jeder Kurvenstelle.* Die W-Parameter sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Relativhauptnormalen und Achsen diese Spiegelachsen sind.

---

[3] Man vgl. *Mohrmann* [8] und *Strubecker* [12], wo dieses Ergebnis in etwas speziellerer Gestalt bereits auftritt.

Die zweite Schar von Projektivitäten einer nichtkubischen W-Komplexkurve ist also leicht zu überblicken, so daß wir uns im folgenden darauf beschränken können, für alle W-Kurven gemeinsam die Gruppe (1.7) zu betrachten. Sie führt nach (1.4) die Bezugsvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ längs der Kurve ineinander über, die Bahnkurven der Gruppe werden also von (1.8) mit $p_k = \text{const}$ beschrieben.

Wir wollen nun die Fixpunkte der Gruppe bestimmen. Dazu sehen wir in (1.8) die p_k zunächst als Funktionen von t an. $\mathfrak{p}(t)$ beschreibt dann eine Raumkurve, die genau dann in einen festen Punkt entartet, wenn

$$\mathfrak{p}' = \varrho\, \mathfrak{p}. \tag{1.9}$$

Schreibt man das mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (1.1) aus, so erhält man die Stationaritätsbedingungen

$$\begin{aligned}
-p_0' + \varrho\, p_0 &= \quad 3a\, p_1 + \quad b\, p_2 + c\, p_3 \\
-p_1' + \varrho\, p_1 &= p_0 \quad + 4a\, p_2 + b\, p_3 \\
-p_2' + \varrho\, p_2 &= \quad p_1 \quad + 3a\, p_3 \\
-p_3' + \varrho\, p_3 &= \quad p_2 \quad .
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Insbesondere ist hier $\varrho = 0$, wenn der zu dem festen Punkt gehörende Vektor noch fest normiert wird.

Für eine Bahnkurve $p_k' = 0$ geht (1.10) über in das System

$$\begin{aligned}
-\varrho\, p_0 + 3a\, p_1 + \quad b\, p_2 + \quad c\, p_3 &= 0 \\
p_0 - \quad \varrho\, p_1 + 4a\, p_2 + \quad b\, p_3 &= 0 \\
p_1 - \quad \varrho\, p_2 + 3a\, p_3 &= 0 \\
p_2 - \quad \varrho\, p_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Das Verschwinden der Determinante dieses Systems führt auf die *charakteristische Gleichung*

$$\varrho^4 - 10a\, \varrho^2 - 2b\, \varrho + (9a^2 - c) = 0. \tag{1.12}$$

Sie hat vier konstante Wurzeln ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 (*Eigenwerte*), deren Summe verschwindet:

$$\Sigma\, \varrho_k = 0. \tag{1.13}$$

Zu jedem Eigenwert ϱ_k gehört nach (1.11) eine eindeutig bestimmte konstante Lösung p_0, p_1, p_2, $p_3 = 1$, die zugehörige Bahnkurve entartet also in einen *Fixpunkt* der Gruppe. Die Anzahl der Fixpunkte stimmt mit der Anzahl der voneinander verschiedenen Eigenwerte überein.

Die Gleichung (1.12) zeigt erneut, daß unter den W-Kurven die Komplexkurven ($b = 0$) eine Sonderrolle spielen: bei ihnen ist mit ϱ stets auch $-\varrho$ Eigenwert.

Die charakteristische Gleichung (1.12) steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der *Grundgleichung* der Kurve; so bezeichnet man die aus (1.1) folgende Beziehung

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}} - 10a\,\mathfrak{x}'' - (2b + 10a')\,\mathfrak{x}' + (9a^2 - c - 3a'' - b')\,\mathfrak{x} = 0, \qquad (1.14')$$

die für W-Kurven in

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}} - 10\,a\,\mathfrak{x}'' - 2\,b\,\mathfrak{x}' + (9\,a^2 - c)\,\mathfrak{x} = 0 \qquad (1.14)$$

übergeht.

Aus (1.14) folgt die bekannte Tatsache [4]: *Alle Bahnkurven der Gruppe sind projektiv gleichwertig, sofern sie wirklich Raumkurven sind.* Denn mit $\mathfrak{x}$ genügen auch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und alle Linearkombinationen (1.8) mit konstanten p_k der Gleichung (1.14).

Betrachten wir zunächst den Fall, daß alle Eigenwerte reell verschieden sind, so läßt sich die Grundgleichung (1.14) durch

$$\mathfrak{x}(t) = \{e^{\varrho_0 t}, e^{\varrho_1 t}, e^{\varrho_2 t}, e^{\varrho_3 t}\} \qquad (1.15)$$

integrieren. Die durch $t \to t^* = t + \tau$ dargestellten Projektivitäten der Kurve in sich induzieren im Raum demnach die projektiven Abbildungen

$$\bar{q}_k = e^{\varrho_k \tau}\, q_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \qquad (1.16)$$

Als Ecken des zugrundegelegten festen Koordinatentetraeders treten offenbar die Fixpunkte der Gruppe auf. Die Determinante der Projektivität (1.16) hat wegen (1.13) den Wert 1.

Sind beispielsweise ϱ_2, ϱ_3 konjugiert komplex, $\varrho_2 = \alpha + i\beta$, $\varrho_3 = \alpha - i\beta$, so erhalten wir in

$$\mathfrak{x}(t) = \{e^{\varrho_0 t}, e^{\varrho_1 t}, e^{\alpha t}\cos\beta\, t, e^{\alpha t}\sin\beta\, t\}, \qquad (1.15')$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= e^{\varrho_0 \tau}\, q_0 \\ \bar{q}_1 &= e^{\varrho_1 \tau}\, q_1 \\ \bar{q}_2 &= e^{\alpha\tau}(q_2 \cos\beta\,\tau - q_3 \sin\beta\,\tau) \\ \bar{q}_3 &= e^{\alpha\tau}(q_2 \sin\beta\,\tau + q_3 \cos\beta\,\tau) \end{aligned} \qquad (1.16')$$

eine reelle Darstellung. Neben $\{1, 0, 0, 0\}$ und $\{0, 1, 0, 0\}$ treten jetzt die komplexen Fixpunkte $\{0, 0, 1, \pm i\}$ auf.

Will man den vorigen Fall reeller Eigenwerte analog dazu behandeln, was wir oft tun werden, so wird man (1.15) und (1.16) ersetzen durch

$$\mathfrak{x}(t) = \{e^{\varrho_0 t}, e^{\varrho_1 t}, e^{\alpha t} \operatorname{Cos} \beta t, e^{\alpha t} \operatorname{Sin} \beta t\}, \tag{1.15''}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= e^{\varrho_0 \tau} q_0 \\ \bar{q}_1 &= e^{\varrho_1 \tau} q_1 \\ \bar{q}_2 &= e^{\alpha \tau}(q_2 \operatorname{Cos} \beta \tau + q_3 \operatorname{Sin} \beta \tau) \\ \bar{q}_3 &= e^{\alpha \tau}(q_2 \operatorname{Sin} \beta \tau + q_3 \operatorname{Cos} \beta \tau), \end{aligned} \tag{1.16''}$$

wo jetzt $\varrho_2 = \alpha + \beta$, $\varrho_3 = \alpha - \beta$ ist. Bei vier (verschiedenen) reellen bzw. konjugiert-komplexen Eigenwerten kann man entsprechend verfahren.

Auch bei zusammenfallenden Eigenwerten und Fixpunkten lassen sich leicht die entsprechenden Formeln angeben (vgl. **3** und **4**). In allen Fällen ist wegen (1.13) die Determinante der Projektivitäten zu 1 normiert.

2. W-Kurven auf Quadriken. Wir wollen jetzt speziell die W-Kurven untersuchen, die auf einer Quadrik oder gar auf allen Quadriken eines Büschels oder Bündels liegen. Hierzu bestimmen wir zunächst alle Quadriken, die eine beliebige W-Kurve an einer Stelle t in sechster Ordnung berühren. Unter diesen befindet sich dann auch jede Quadrik, auf der die W-Kurve liegt.

Die zu bestimmende Quadrik sei bezüglich eines festen Koordinatensystems durch die Gleichung

$$\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q} \rangle = \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik} q_i q_k = 0, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad a_{ik} = \text{const} \tag{2.1}$$

gegeben. Sie berührt unsere Kurve $\mathfrak{x}(t)$ genau dann in sechster Ordnung, wenn für die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{2} \langle \mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t) \rangle \tag{2.2}$$

an der Stelle t die Beziehungen

$$f = f' = f'' = f''' = f^{\mathrm{IV}} = f^{\mathrm{V}} = f^{\mathrm{VI}} = 0 \tag{2.3}$$

gelten. Aus (1.1) folgt durch Differenzieren

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{x} \rangle \\ f' &= \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{t} \rangle \\ f'' &\equiv \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{y} \rangle + \langle \mathfrak{t}\, \mathfrak{t} \rangle \pmod{f} \\ f''' &\equiv \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{z} \rangle + 3 \langle \mathfrak{t}\, \mathfrak{y} \rangle \pmod{f, f'} \\ f^{\mathrm{IV}} &\equiv 4 \langle \mathfrak{t}\, \mathfrak{z} \rangle + 3 \langle \mathfrak{y}\, \mathfrak{y} \rangle \pmod{f, f', f''} \\ f^{\mathrm{V}} &\equiv 10 \langle \mathfrak{y}\, \mathfrak{z} \rangle + 2b \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{y} \rangle \pmod{f, f', f'', f'''} \\ f^{\mathrm{VI}} &\equiv 10 \langle \mathfrak{z}\, \mathfrak{z} \rangle + 10c \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{y} \rangle + 8b \langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{z} \rangle \pmod{f, f', f'', f''', f^{\mathrm{IV}}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lassen wir jetzt das feste Grundkoordinatensystem mit dem lokalen Bezugstetraeder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ an der festen Stelle t zusammenfallen, so daß die lokalen Koordinaten p_k von (1.8) mit den q_k identisch sind, so bestimmen sich die a_{ik} in (2.1) aus

$$\begin{aligned} &a_{00} = a_{01} = 0,\ a_{11} = -a_{02} = 5\,\mu_1,\\ &2\,a_{12} = -5\,\mu_2,\ 2\,a_{03} = 15\,\mu_2,\ 2\,a_{13} = 15\,\mu_3,\ a_{22} = -10\,\mu_3,\\ &a_{23} = b\,\mu_1,\ a_{33} = 5\,c\,\mu_1 - 6\,b\,\mu_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit beliebigen μ_1, μ_2, μ_3.

Daraus folgt: Die Quadriken des Bündels

$$Q = \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \mu_3 Q_3 = 0 \tag{2.6}$$

mit

$$\begin{aligned} Q_1 &= 5\,p_1^2 - 10\,p_0\,p_2 + 2\,b\,p_2\,p_3 + 5\,c\,p_3^2\\ Q_2 &= 15\,p_0\,p_3 - 5\,p_1\,p_2 - 6\,b\,p_3^2\\ Q_3 &= 15\,p_1\,p_3 - 10\,p_2^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

berühren die W-Kurve an der Stelle t in sechster Ordnung.

Nach den Stationaritätsbedingungen (1.10) finden wir

$$\begin{aligned} Q_1' &= 2\,a\,Q_2 - \frac{4}{5}\,b\,Q_3 + 6\,ab\,p_3^2\\ Q_2' &= Q_1 - 2\,a\,Q_3 - 20\,c\,p_3^2\\ Q_3' &= -Q_2 - 21\,b\,p_3^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hieraus ergibt sich:

(A) *Das Quadrikbündel* (2.6) *ist genau dann als Ganzes bei den Projektivitäten der W-Kurve fest, wenn* $b = c = 0$ *gilt.* Die W-Kurve ist dann Schnitt der drei Quadriken $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ und besitzt also die Parameterdarstellung $\{3, 6\,t, 6\,t^2, 4\,t^3\}$. Darin ist die bekannte Tatsache[2] enthalten, daß $b = c = 0$ die Raumkurven dritter Ordnung kennzeichnet.

(B) Ist das Quadrikbündel als Ganzes nicht fest, soll es aber in ihm ein Quadrikbüschel geben, das bei der eingliedrigen Gruppe der W-Kurve in sich übergeht, so muß für jedes Element Q dieses Büschels auch Q' in diesem Büschel liegen. Nach (2.6) und (2.8) ist

$$\begin{aligned} Q' = \mu_2 Q_1 + (2\,a\,\mu_1 - \mu_3)\,Q_2 + (-\frac{4}{5}\,b\,\mu_1 - 2\,a\,\mu_2)\,Q_3 +\\ + (6\,a\,b\,\mu_1 - 20\,c\,\mu_2 - 21\,b\,\mu_3)\,p_3^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jedenfalls muß zunächst der Faktor von p_3^2 verschwinden, so daß nur das Büschel

$$6\,a\,b\,\mu_1 - 20\,c\,\mu_2 - 21\,b\,\mu_3 = 0 \tag{2.10}$$

fest sein kann. Es ist tatsächlich fest, wenn Q' auch zum Büschel (2.10) gehört, wenn also für jede Lösung von (2.10) auch

$$6\,a\,b\,\mu_2 - 20\,c\,(2\,a\,\mu_1 - \mu_3) - 21\,b(-\frac{4}{5}\,b\,\mu_1 - 2\,a\,\mu_2) = 0 \tag{2.11}$$

erfüllt ist. Der Rang des Systems (2.10), (2.11) ist genau dann 1, wenn

$$49\,b^2 - 100\,ac = 0, \quad 25\,c^2 - 63\,ab^2 = 0. \tag{2.12}$$

Hier ist $b \neq 0$, da sonst wieder Fall (A) einträte. Legt man den Parameter durch $b = 60$ fest, so besitzt (2.12) nur die eine reelle Lösung

$$a = 7,\ b = 60,\ c = 252. \tag{2.13}$$

Mit diesen Werten lautet die charakteristische Gleichung

$$\varrho^4 - 70\,\varrho^2 - 120\,\varrho + 189 = (\varrho - 1)(\varrho + 3)(\varrho + 7)(\varrho - 9) = 0. \tag{2.14}$$

Nach (1.15) wird die W-Kurve dargestellt durch

$$\mathfrak{x}(t) = \{e^t, e^{-3t}, e^{-7t}, e^{9t}\}, \tag{2.15}$$

ihre eingliedrige Gruppe nach (1.16) durch

$$\bar{q}_0 = e^{\tau}\,q_0, \quad \bar{q}_1 = e^{-3\tau}\,q_1, \quad \bar{q}_2 = e^{-7\tau}\,q_2, \quad \bar{q}_3 = e^{9\tau}\,q_3. \tag{2.16}$$

Als Fixquadriken besitzt sie, wie eine einfache Rechnung zeigt, genau die Elemente der beiden Kegelbüschel

$$q_0^2 - \nu_0\,q_2\,q_3 = 0, \quad q_1^2 - \nu_1\,q_0\,q_2 = 0. \tag{2.17}$$

Unsere Kurve liegt auf den Kegeln $\nu_0 = \nu_1 = 1$; diese erzeugen das oben erwähnte, als Ganzes (aber nicht elementweise) feste Quadrikbüschel

$$q_0^2 - q_2\,q_3 + \nu(q_1^2 - q_0\,q_2) = 0, \tag{2.18}$$

dessen Basiskurve (2.15) offenbar die rationale Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(s) = \{s^2, s, 1, s^4\} \tag{2.19}$$

gestattet (Abb. 1). *Es gibt also unter den Raumkurven vierter Ordnung erster Art genau eine, die W-Kurve ist.* Sie hat eine Spitze[4].

[4] Dies ist schon in den allgemeineren Ergebnissen von *H. Mohrmann* [7], [8] über algebraische W-Kurven enthalten.

Die zweite nach *Mohrmann* noch existierende W-C_4: $\{1, s, s^3, s^4\}$ hat zwei reelle oder konjugiert komplexe stationäre Tangenten und ist von zweiter Art. Ihre beiden reell verschiedenen Typen genügen in der Darstellung

Unserer Kurve projektiv gleichwertig sind die anderen Bahnkurven der Gruppe; jede ist Schnitt je eines Fixkegels der beiden Büschel (2.17). Ausnahmestellen sind nur die Punkte der Fixebenen, also der Seitenebenen des Tetraeders der Fixpunkte; sie durchlaufen ebene Kurven oder sind fest.

(C) Zuletzt fragen wir, wann nur eine Quadrik unseres Quadrikbündels (2.6) fest ist, wann also unsere W-Kurve auf genau einer festen Quadrik liegt. Fest ist die Quadrik Q genau dann, wenn $Q' = \lambda Q$, und dies führt nach (2.9) auf

$$\begin{aligned} \lambda\,\mu_1 - \quad \mu_2 \quad\quad\quad &= 0 \\ 2\,a\,\mu_1 - \quad \lambda\,\mu_2 - \quad \mu_3 &= 0 \\ 4\,b\,\mu_1 + 10\,a\,\mu_2 + \; 5\,\lambda\,\mu_3 &= 0 \\ 6\,a\,b\,\mu_1 - 20\,c\,\mu_2 - 21\,b\,\mu_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dieses System für die Unbekannten μ_1, μ_2, μ_3 besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn zwischen a, b, c, λ die Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} 21\,b\,\lambda^2 - 20 \quad c\,\lambda - 36\,a\,b &= 0 \\ 25\,c\,\lambda^2 - 60\,a\,b\,\lambda - 21\,b^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

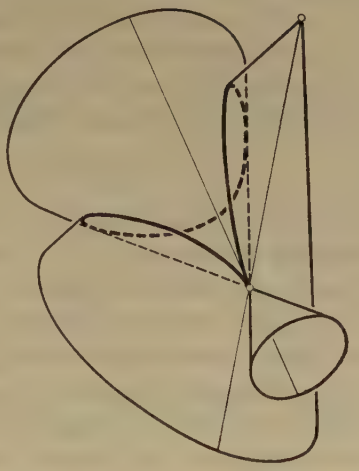

Abb. 1. Fixkegel und W-Kurve im Falle (B). Die Spitze des zweiten Kegels liegt so auf einer Mantellinie des ersten, daß deren Tangentialebene den zweiten Kegel berührt. Die beiden Berührerzeugenden (fein gezeichnet) sind Fixgeraden der Gruppe. Als Schnittgebilde der beiden Fixkegel ist die W-Kurve eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art. Die Gruppe läßt das von den beiden Fixkegeln erzeugte Quadrikbüschel als Ganzes fest.

Zu einer gemeinsamen Lösung λ dieser beiden Gleichungen gehört

---

$\{e^{-2it}, e^{-it}, e^{it}, e^{2it}\}$ bzw. $\{e^{-2t}, e^{-t}, e^{t}, e^{2t}\}$

der Grundgleichung

$$\xi^{IV} + 5\,\xi'' + 4\,\xi = 0 \text{ bzw. } \xi^{IV} - 5\,\xi'' + 4\,\xi = 0.$$

Das führt nach 1 auf die Eigenwerte

$$\pm i, \; \pm 2\,i \text{ bzw. } \pm 1, \; \pm 2$$

und auf die Invarianten

$$a = -\,1/2, \; b = 0, \; c = -\,7/4 \text{ bzw. } a = +\,1/2, \; b = 0, \; c = -\,7/4$$

oder nach (1.3) einfacher auf

$$a = -\,1, \; b = 0, \; c = -\,7 \text{ bzw. } a = +\,1, \; b = 0, \; c = -\,7.$$

Diese C_4 gehören also zu den Fällen (3) (a) bzw. (b) der später folgenden Klassifikation. Man vgl. auch *Strubecker* [12], [13].

eindeutig eine Quadrik Q (die μ_k bestimmen sich aus (2.20)), die bei den Projektivitäten der W-Kurve in sich fest bleibt. Die W-Kurve liegt auf dieser Quadrik.

Genau dann, wenn (2.12) gilt, gibt es *zwei* gemeinsame Wurzeln λ_1, λ_2; wir kommen dann auf Fall (B) zurück.

Sehen wir davon jetzt ab, so haben die Gleichungen (2.21) höchstens eine Lösung λ gemeinsam. Dies trifft genau dann zu, wenn

$$b \cdot [27\,K^2 + 400\,L(36\,a^2 - 7\,c)] = 0, \tag{2.22}$$

wo K, L die linken Seiten der Gleichungen (2.12) bedeuten. Da wir über eine der Konstanten a, b, c noch verfügen können, so folgt: *Die W-Kurven auf Quadriken hängen von einer willkürlichen Konstanten ab.*

Da jetzt also unsere W-Kurve und damit jede Bahnkurve der Gruppe auf genau einer Quadrik liegt, gibt es durch jeden Raumpunkt (von Ausnahmestellen abgesehen) eine und nur eine Fixquadrik der Gruppe. Wir werden bei der Besprechung der einzelnen Fälle von (C) jeweils die Gruppe und ein *Büschel von Fixquadriken* angeben; weitere Fixquadriken kann es dann also nicht geben. (Bei (B) existieren dagegen zwei solche Büschel). Die Basiskurve des Büschels ist in allen Fällen ein Vierseit mit den Fixpunkten als Ecken, das auch entarten kann. In Abb. 2 sind diese Vierseite zusammen mit den weiteren, nicht zum Vierseit gehörigen Fixgeraden der Gruppe dargestellt.

Für unsere spätere Klassifikation der W-Kurven auf einer (eindeutig bestimmten) Quadrik zeichnet sich jetzt schon eine wichtige Einteilung ab. Wir können nämlich unterscheiden, ob die Gruppe der W-Kurve die Quadrik nur als geometrisches Gebilde festläßt, oder ob sogar ihre quadratische Form invariant ist. (Man denke an die analoge Frage bei der Unterscheidung von euklidischer und äquiformer Geometrie: Die W-Kurven der euklidischen Geometrie, die Kreise und Geraden, werden durch eine eingliedrige Gruppe in sich übergeführt, die nicht nur die isotropen Kreispunkte, sondern auch deren quadratische Form festlassen. Die eingliedrige Gruppe von äquiformen Abbildungen einer logarithmischen Spirale in sich läßt hingegen nur die Kreispunkte, nicht aber die zugehörige quadratische Form fest.)

Die Form Q ist genau dann fest, wenn $Q' = 0$ ist, also wenn in (2.20) $\lambda = 0$ gilt. (2.21) zeigt aber, daß dann auch $b = 0$ ist. Daher: *Die eingliedrige Gruppe einer W-Kurve auf einer (eindeutig bestimmten) Quadrik läßt nur dann die zugehörige Form fest, wenn die W-Kurve Komplexkurve ist. Umgekehrt gibt es zu einer W-Komplexkurve immer*

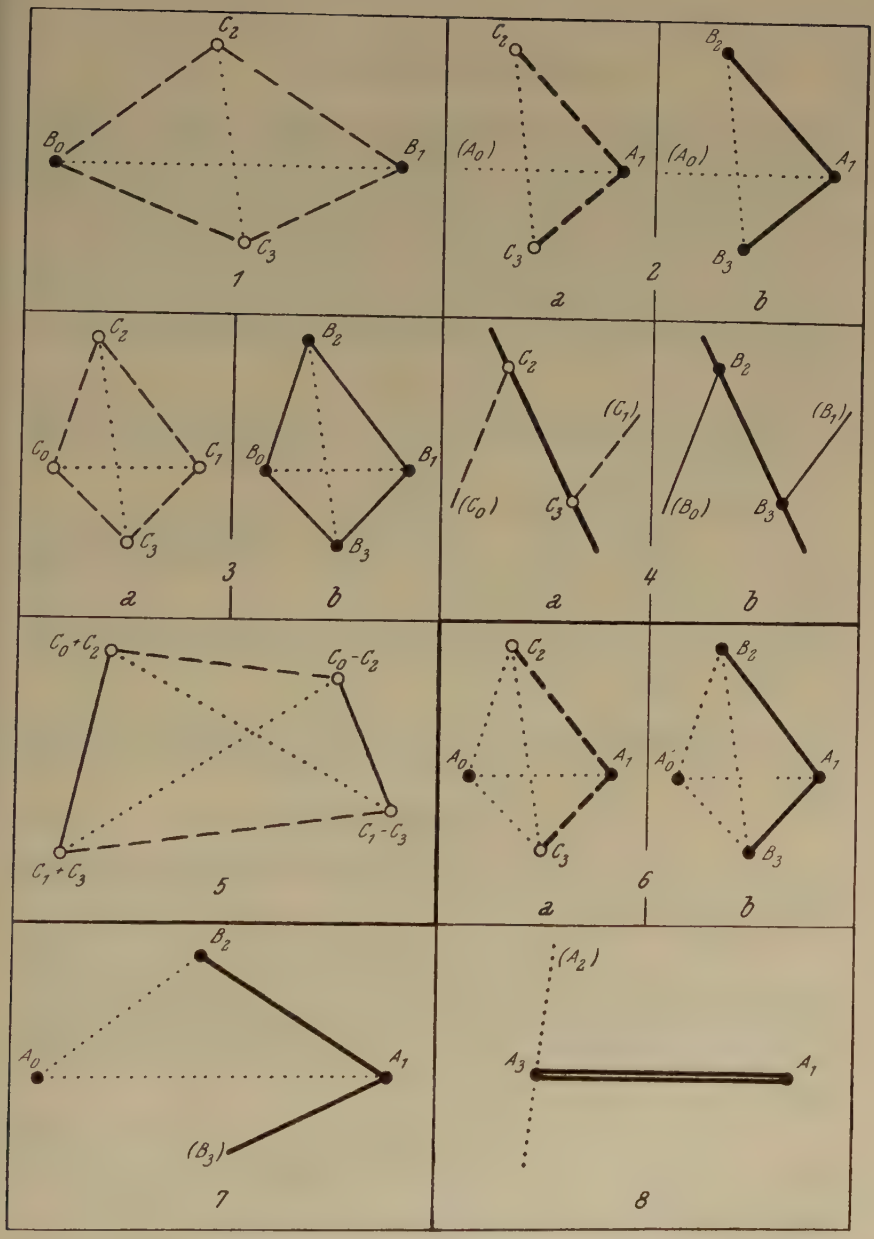

Abb. 2. Basisvierseite der Fixbüschel. Reelle (imaginäre) Geraden des Basisvierseits sind ausgezogen (gestrichelt), reelle (imaginäre) Eckpunkte ausgefüllt (leer). Doppeltgezählte Geraden sind fett gezeichnet. Fixgeraden der Gruppe, die nicht zum Vierseit gehören, sind punktiert. Ferner bedeutet:

$A_0 = (1, 0, 0, 0)$, $A_1 = (0, \quad 1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 0, \quad 1)$

$B_0 = (1, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, -1, 0, 0)$, $B_2 = (0, 0, 1, 1)$, $B_3 = (0, 0, 1, -1)$

$C_0 = (1, i, 0, 0)$, $C_1 = (1, -i, 0, 0)$, $C_2 = (0, 0, 1, i)$, $C_3 = (0, 0, 1, -i)$.

Die Fälle (1) bis (5) gehören zu den W-Komplexkurven (s. 3), die Fälle (6) bis (8) zu den W-Kurven auf Kegeln, die keine Komplexkurven sind (s. 4).

eine solche feste quadratische Form, auf deren Quadrik sie liegt. Die Umkehrung gilt, weil für $b = 0$ (2.22) erfüllt ist und aus (2.21) $\lambda = 0$ folgt.

Ist die Quadrik nicht ausgeartet, so ändert sich die Determinante ihrer quadratischen Form bei einer Projektivität P bekanntlich um den Faktor $|P|^2$. Nach dem am Ende von Abschnitt 1 Gesagten ist $|P| = 1$, und aus Stetigkeitsgründen ist die Form also fest. Damit folgt: *Eine W-Kurve auf einer nichtausgearteten (Fix-)Quadrik ist Komplexkurve*[5].

Demnach muß die feste Quadrik für $b \neq 0$, also $\lambda \neq 0$, ein Kegel sein. Dagegen kann die feste Quadrik bei $b = 0$ sowohl nichtausgeartet als auch ein Kegel sein.

Wir haben also im folgenden zu diskutieren:

I. *Die W-Komplexkurven*; bei ihnen ist zu unterscheiden, ob sie auf einer Quadrik vom Typus der Kugel oder des einschaligen Hyperboloids oder auf einem Kegel liegen.

II. *Die W-Kurven auf einem Kegel*, dessen zugehörige Form nicht fest ist, *die* also *keine Komplexkurven sind.*

3. Die W-Komplexkurven. Mit $\lambda = b = 0$ lautet die Gleichung der Quadrik, auf der unsere W-Kurve liegt, nach (2.6) und (2.20)

$$p_1^2 - 2\,p_0\,p_2 + c\,p_3^2 + 6\,a\,p_1\,p_3 - 4\,a\,p_2^2 = 0. \tag{3.1}$$

Sie ist vom Typus der Kugel, des reellen Kegels oder des einschaligen Hyperboloids, je nachdem

$$c - 9\,a^2 \gtreqless 0. \tag{3.2}$$

Daneben interessieren die Eigenwerte und Fixpunkte der eingliedrigen Gruppe der W-Kurve. Die charakteristische Gleichung (1.12) hat jetzt, wie schon früher bemerkt, paarweise entgegengesetzt gleiche Wurzeln und schreibt sich in der Gestalt

$$\varrho^4 - 10\,a\,\varrho^2 + 9\,a^2 - c = 0. \tag{3.3}$$

Die Wurzeln dieser in ϱ^2 quadratischen Gleichung sind reell verschieden, zusammenfallend oder konjugiert komplex, je nachdem

$$c + 16\,a^2 \gtreqless 0. \tag{3.4}$$

Ihr Vorzeichen bestimmt sich in bekannter Weise aus den Koeffizienten der quadratischen Gleichung.

---

[5] Dies ist die Umkehrung der in der Einleitung zitierten beiden Sätze und zugleich die Präzisierung eines Ergebnisses in [1].

In der *Tabelle 1* sind die verschiedenen, sich so ergebenden Kurventypen zusammengestellt; sie lassen sich durch $b = 0$ und den Wert der Invarianten $J = c/a^2$ sowie durch das Vorzeichen von a bei $-16 \leq J \leq 9$ schon vollständig charakterisieren. Für die Fixpunkte und Basisvierseite der jeweiligen Gruppe sei nochmals auf Abb. 2 verwiesen, aus der auch hervorgeht, welche der Fälle (1) bis (5) sowie der späteren (6) bis (8) als Grenzfälle anderer anzusehen sind.

Tabelle 1

	Wertebereich der Invarianten		Typus der quadratischen Fläche	Eigenwerte ϱ_k			
	$J = \frac{c}{a^2}$	a					
(1)	$J > 9$		Kugel	a	$-a$	$i\beta$	$-i\beta$
(2) (a)	$J = 9$	$a < 0$	Kegel	0	0	$i\beta$	$-i\beta$
(2) (b)		$a > 0$		0	0	β	$-\beta$
(3) (a)	$-16 < J < 9$ $J \neq 0$	$a < 0$	Hyperboloid	ia	$-ia$	$i\beta$	$-i\beta$
(3) (b)		$a > 0$		a	$-a$	β	$-\beta$
(4) (a)	$J = -16$	$a < 0$	Hyperboloid	ia	$-ia$	ia	$-ia$
(4) (b)		$a > 0$		a	$-a$	a	$-a$
(5)	$J < -16$		Hyperboloid	$a+i\beta$	$a-i\beta$	$-a+i\beta$	$-a-i\beta$

(1) Die W-Kurven auf einer Kugel sind schon lange bekannt als die Isogonaltrajektorien eines Kreisbüschels[6].

Wir wollen das auch mit unseren Formeln bestätigen. Nach (1.15′) und (1.15″) läßt sich unsere W-Kurve hier so darstellen:

$$\mathfrak{x}(t) = \{\mathrm{Cos}\,\alpha t,\ \mathrm{Sin}\,\alpha t,\ \cos\beta t,\ \sin\beta t\}. \tag{3.5}$$

Ihre eingliedrige Gruppe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= q_0 \,\mathrm{Cos}\,\alpha\tau + q_1 \,\mathrm{Sin}\,\alpha\tau \\ \bar{q}_1 &= q_0 \,\mathrm{Sin}\,\alpha\tau + q_1 \,\mathrm{Cos}\,\alpha\tau \\ \bar{q}_2 &= q_2 \cos\beta\tau - q_3 \sin\beta\tau \\ \bar{q}_3 &= q_2 \sin\beta\tau + q_3 \cos\beta\tau, \end{aligned} \tag{3.6}$$

deren Bahnkurven alle zu (3.5) projektiv äquivalent sind und die die Quadriken des Büschels

[6] Man vgl. etwa [12], wo auch weitere Literatur angegeben ist.

$$q_2^2 + q_3^2 - \nu(q_0^2 - q_1^2) = 0 \tag{3.7}$$

festläßt.

Unsere Kurve (3.5) liegt auf der Büschelquadrik mit $\nu = 1$:

$$q_2^2 + q_3^2 + q_1^2 - q_0^2 = 0. \tag{3.8}$$

In den cartesischen Koordinaten

$$x = \frac{q_2}{q_0}, \quad y = \frac{q_3}{q_0}, \quad z = \frac{q_1}{q_0} \tag{3.9}$$

ist das die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \tag{3.10}$$

und unsere Kurve ist eine *Loxodrome*, die die Kugelmeridiane unter dem Winkel ϑ mit $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\beta}{\alpha}$ schneidet. Die übrigen nichtausgearteten Büschelquadriken sind Ellipsoide oder zweischalige Hyperboloide.

Die W-Kurven auf der Kugel lassen sich nun auch deuten als die *W-Kurven der ebenen Möbius-Geometrie*, soweit diese *räumlichen* Kurven auf der Kugel entsprechen. Dazu bilden wir die Kugel (3.8) vermöge der stereographischen Projektion

$$\begin{aligned} \sigma\, q_0 &= 1 + \xi^2 + \eta^2 \\ \sigma\, q_1 &= 1 - \xi^2 - \eta^2 \\ \sigma\, q_2 &= 2\,\xi \\ \sigma\, q_3 &= 2\,\eta \end{aligned} \tag{3.11}$$

auf die Möbius-Ebene mit den cartesischen Koordinaten ξ, η ab. Der Gruppe von Projektivitäten (3.6) entspricht in der Ebene die induzierte eingliedrige Gruppe von äquiformen Abbildungen

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= e^{-\alpha\tau}(\xi \cos\beta\,\tau - \eta \sin\beta\,\tau) \\ \bar{\eta} &= e^{-\alpha\tau}(\xi \sin\beta\,\tau + \eta \cos\beta\,\tau), \end{aligned} \tag{3.12}$$

deren Bahnkurven *logarithmische Spiralen* sind, die die Ursprungsstrahlen wiederum unter ϑ mit $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\beta}{\alpha}$ schneiden. Die allgemeinen W-Kurven der Möbius-Geometrie entstehen aus ihnen durch Möbius-Abbildung, sind also Isogonaltrajektorien nichtausgearteter Kreisbüschel (ebene Loxodromen). Sie hängen von einer Konstanten ab, eben dem Schnittwinkel ϑ mit den Kreisen des Büschels.

Einer beliebigen Bahnkurve im projektiven Raum, die nicht auf der ausgezeichneten Quadrik (3.8), sondern einer anderen Quadrik des Büschels (3.7) liegt, entspricht bei der stereographischen Projektion eine ebene Kreisschar. Falls deren Hüllkurven reell sind, sind das wieder Bahnkurven der Gruppe (3.12), also logarithmische Spiralen. Denn diesen Hüllkurven entsprechen auf der Kugel Kurven, die von den reziproken Polaren der Tangenten an die räumliche W-Kurve aus der Kugel ausgeschnitten werden, und das sind W-Kurven auf der Kugel.

(2) (a), (b) In diesen beiden Fällen, die wir gleichzeitig besprechen wollen, haben wir nach **1** für unsere W-Kurve die Darstellung

$$\mathfrak{x}(t) = \{1, t, \cos\beta t, \sin\beta t\} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{x}(t) = \{1, t, \operatorname{Cos}\beta t, \operatorname{Sin}\beta t\} \tag{3.13}$$

und die Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= q_0 \\ \bar{q}_1 &= q_0\tau + q_1 \\ \bar{q}_2 &= q_2\cos\beta\tau - q_3\sin\beta\tau \\ \bar{q}_3 &= q_2\sin\beta\tau + q_3\cos\beta\tau \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \bar{q}_0 &= q_0 \\ \bar{q}_1 &= q_0\tau + q_1 \\ \bar{q}_2 &= q_2\operatorname{Cos}\beta\tau + q_3\operatorname{Sin}\beta\tau \\ \bar{q}_3 &= q_2\operatorname{Sin}\beta\tau + q_3\operatorname{Cos}\beta\tau \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit dem Büschel von Fixkegeln

$$q_2^2 \pm q_3^2 - \nu q_0^2 = 0, \tag{3.15}$$

deren gemeinsame Spitze $\{0, 1, 0, 0\}$ ist.

Unsere Kurve (3.13) liegt auf der Büschelquadrik mit $\nu = 1$:

$$q_2^2 \pm q_3^2 - q_0^2 = 0, \tag{3.16}$$

das ist in den cartesischen Koordinaten (3.9) der Zylinder

$$x^2 \pm y^2 - 1 = 0 \tag{3.17}$$

über einem Kreis bzw. einer gleichseitigen Hyperbel. Die W-Kurve (3.13) ist hier die wohlbekannte gewöhnliche Schraublinie bzw. die „Hyperbel-Schraublinie", die Gruppe (3.14) ist die Gruppe der euklidischen Schraubungen bzw. der „Hyperbel-Schraubungen" längs der z-Achse (Abb. 3a, b).

Die bekannte Deutung der gewöhnlichen Schraublinie als *Loxodrome der Erzeugendenschar* ihres Zylinders läßt sich sofort auch auf die Hyperbel-Schraublinie übertragen. Man hat dazu nur den Maßkegelschnitt der euklidischen Metrik zu ersetzen durch den Fernkegelschnitt des Kegels $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ als Maßkegelschnitt einer indefiniten *Lorentz-Minkowski*-Metrik und bestätigt leicht die Konstanz der Schnittwinkel der Bahnkurven mit den Erzeugenden.

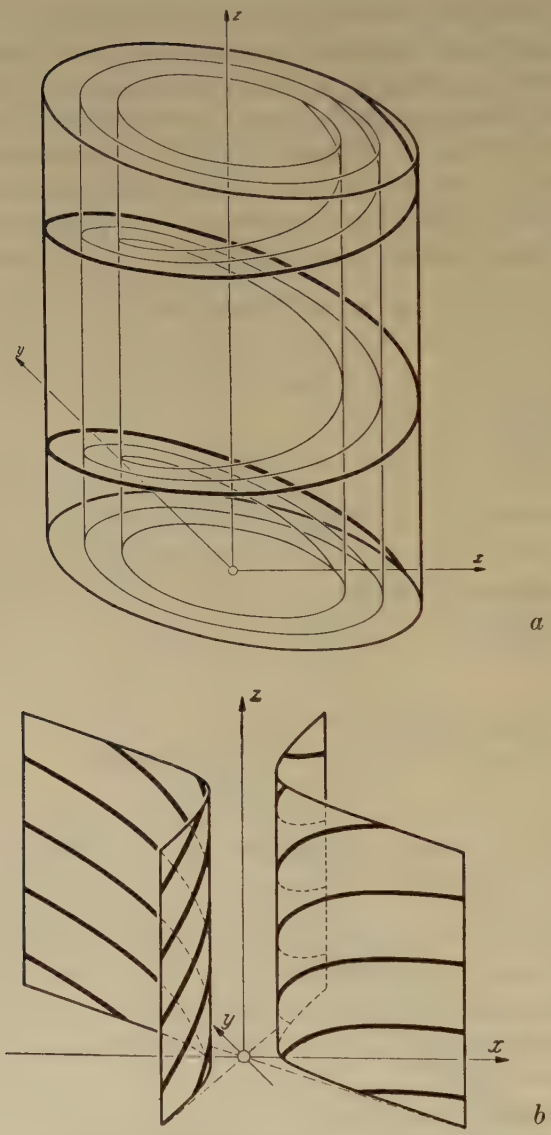

Abb. 3. Die einzigen W-Komplexkurven auf Kegeln sind die gewöhnliche Schraublinie (a) und die Hyperbel-Schraublinie (b) sowie die zu diesen projektiv äquivalenten Kurven. In der Darstellung $x = \mathrm{Cos}\,\beta t$, $y = \mathrm{Sin}\,\beta t$ der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ bezeichnet man den Parameter βt als (hyperbolischen) „Drehwinkel" des Punktes (x, y), gemessen vom Punkt (1,0) aus. Beide Schraublinien entstehen, indem man den Punkt (1, 0, 0) um den Winkel βt „dreht" und ihn gleichzeitig um die zu βt proportionale Strecke t in z-Richtung anhebt.

Da sich nach (1.3) der Kurvenparameter so festlegen läßt, daß die Kurveninvarianten die Zahlwerte

$$a = \mp 1,\ b = 0,\ c = 9 \tag{3.18}$$

annehmen und also nach (3.3)

$$\beta^2 = 10 \tag{3.19}$$

wird, hängt unsere Figur nicht mehr von willkürlichen Konstanten ab. *Es gibt also genau zwei (bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmte) W-Komplexkurven auf Keyeln, die euklidische und die Hyperbel-Schraublinie.*

Analog zu Fall (1) können wir hier die W-Kurven auf dem Kegel (3.16) deuten als *W-Kurven der ebenen Laguerre-Geometrie*, und zwar der *engeren* Laguerre-Geometrie, weil wir ja wissen, daß sogar die quadratische Form dieses Kegels fest bleibt. Vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma q_0 &= 1 & &\text{bzw.} & \sigma q_0 &= v \\ \sigma q_1 &= w & & & \sigma q_1 &= w \\ \sigma q_2 &= u & & & \sigma q_2 &= 1 \\ \sigma q_3 &= v & & & \sigma q_3 &= u \end{aligned} \tag{3.20}$$

sei nämlich jedem von der Spitze verschiedenen Punkt auf dem Kegel (3.16) die gerichtete Gerade $ux + vy + w = 0$ mit $u^2 + v^2 = 1$ der euklidischen Ebene zugeordnet. Die Gruppe (3.14) geht dabei über in die Gruppe der Geradenabbildungen

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u\cos\beta\tau - v\sin\beta\tau & &\text{bzw.} & \bar{u} &= \frac{1}{N}(\operatorname{Sin}\beta\tau + u\operatorname{Cos}\beta\tau) \\ \bar{v} &= u\sin\beta\tau + v\cos\beta\tau & & & \bar{v} &= \frac{1}{N}\cdot v \\ \bar{w} &= w + \tau & & & \bar{w} &= \frac{1}{N}(v\tau + w), \\ & & & & N &= \operatorname{Cos}\beta\tau + u\operatorname{Sin}\beta\tau. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Hüllkurven dieser einparametrigen Geradenscharen, die den W-Kurven auf dem Kegel entsprechen, sind bei (2) (a) *Evolventen des Kreises* $x^2 + y^2 = \beta^{-2}$ und lassen sich durch Drehung um den Ursprung ineinander überführen (Abb. 4 a). Bei (b) handelt es sich um *Traktrizen* mit der Asymptote $x = 0$ und dem konstanten Tangentenabschnitt

$1/\beta$, die durch Parallelverschiebung längs der y-Achse auseinander hervorgehen (Abb. 4 b). Diese Kurven sind natürlich in der engeren

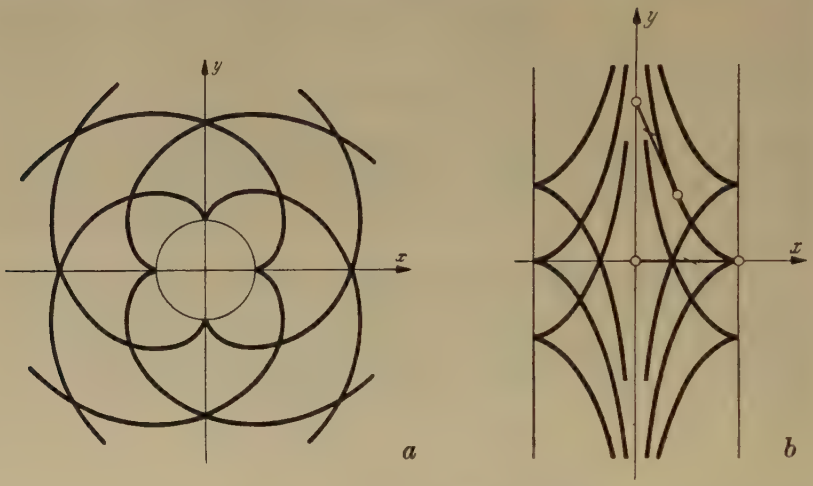

Abb. 4. Unterwirft man die beiden W-Komplexkurven auf Kegeln der Abbildung (3.20), so erhält man als W-Kurven der *engeren* Laguerre-Geometrie im Falle (a) die *Evolventen des Kreises* $x^2 + y^2 = \beta^{-2}$, im Falle (b) die Traktrizen mit der Asymptote $x = 0$ und dem konstanten Tangentenabschnitt β^{-1}.

Laguerre-Geometrie[7] schon als deren W-Kurven bekannt (vgl. *Blaschke* [2], *Schatz* [9]).

Wie in (1) entsprechen den nicht auf dem Kegel gelegenen räumlichen W-Kurven, aufgefaßt als Gesamtheit ihrer Schmiegebenen, Kreisscharen der Ebene, deren Hüllkurven — falls sie reell sind — unsere Kreisevolventen bzw. Traktrizen sind. Denn die einhüllenden Geradenscharen dieser Kreisscharen in der Ebene korrespondieren mit Kurven auf dem Kegel, die von den Tangenten an die räumliche W-Kurve ausgeschnitten werden.

Auch vom Standpunkt der projektiven Differentialgeometrie lassen sich unsere beiden W-Kurven (3.13) kennzeichnen. Zunächst bemerken wir, daß längs der Kurve die Achsen $(\mathfrak{t}\ \mathfrak{z})$ des zu einem W-Parameter gehörigen Bezugssystems durch einen Fixpunkt der Gruppe gehen und dual entsprechend in einer Fixebene der Gruppe liegen, also ein Büschel bilden, wie mittels (3.18), (1.12), (1.11) leicht zu bestätigen ist. Diese Eigenschaft zeichnet nun unsere Kurven unter allen Raumkurven aus:

[7] Bezüglich der weiteren Laguerre-Gruppe vgl. 4.

Die Kurven (3.13) *sind die einzigen nichtkubischen Raumkurven, für die sich ein Parameter so wählen läßt, daß die Achsen des zugehörigen Bezugssystems ein Büschel bilden.*

Denn die Achsen gehen genau dann durch einen festen Punkt $\mathfrak{r} = \mathfrak{z} + \xi\,\mathfrak{t}$, wenn $\mathfrak{r}' = \eta\,\mathfrak{r}$. Da nach (1.1)

$$\mathfrak{r}' = (3\,a + \xi)\,\mathfrak{y} + (b + \xi')\,\mathfrak{t} + (c + 3\,a\,\xi)\,\mathfrak{x},$$

ist $\eta = 0$ und also

$$3\,a' - b = 0, \quad c - 9\,a^2 = 0 \tag{3.22}$$

notwendig und hinreichend. Dual analog liegen die Achsen genau dann in einer festen Ebene, wenn

$$3\,a' + b = 0, \quad c - 9\,a^2 = 0. \tag{3.23}$$

(3.22) und (3.23) zusammen ergeben aber für $a \neq 0$ (3.18), für $a = 0$ liefern sie $b = c = 0$.

Wählt man die Büschelebene als uneigentliche Ebene, wie dies oben durch die Koordinaten (3.9) geschehen ist, so ist ein zugehöriger Parameter *Affinbogenlänge der Kurve*[8]. Also ist t in (3.13) und ebenso jeder andere W-Parameter Affinbogenlänge.

(3) (a), (b) Diese beiden Fälle lassen sich wieder gemeinsam behandeln. Wir werden uns überdies kurz fassen, da sich bei *Strubecker* [13] eine sehr eingehende Diskussion hierzu findet.

Nach 1 gehen wir aus von der Kurve

$$\mathfrak{x}(t)=\{\cos\alpha t, \sin\alpha t, \cos\beta t, \sin\beta t\} \text{ bzw. } \mathfrak{x}(t)=\{\operatorname{Cos}\alpha t, \operatorname{Sin}\alpha t, \operatorname{Cos}\beta t, \operatorname{Sin}\beta t\} \tag{3.24}$$

und der zugehörigen Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= q_0\cos\alpha\tau - q_1\sin\alpha\tau & \bar{q}_0 &= q_0\operatorname{Cos}\alpha\tau + q_1\operatorname{Sin}\alpha\tau \\ \bar{q}_1 &= q_0\sin\alpha\tau + q_1\cos\alpha\tau & \bar{q}_1 &= q_0\operatorname{Sin}\alpha\tau + q_1\operatorname{Cos}\alpha\tau \\ \bar{q}_2 &= q_2\cos\beta\tau - q_3\sin\beta\tau \quad \text{bzw.} & \bar{q}_2 &= q_2\operatorname{Cos}\beta\tau + q_3\operatorname{Sin}\beta\tau \\ \bar{q}_3 &= q_2\sin\beta\tau + q_3\cos\beta\tau & \bar{q}_3 &= q_2\operatorname{Sin}\beta\tau + q_3\operatorname{Cos}\beta\tau \end{aligned} \tag{3.25}$$

mit dem Büschel von Fixhyperboloiden

$$q_2^2 \pm q_3^2 - \nu(q_0^2 \pm q_1^2) = 0. \tag{3.26}$$

Unsere Kurve (3.24) liegt auf der Büschelquadrik mit $\nu = 1$:

$$q_2^2 \pm q_3^2 \mp q_1^2 - q_0^2 = 0, \tag{3.27}$$

also bei Verwendung der cartesischen Koordinaten (3.9) auf dem Rotationshyperboloid

$$x^2 \pm y^2 \mp z^2 - 1 = 0. \tag{3.28}$$

[8] Man vgl. [3], S. 196, Aufg. 2.

Wie *Strubecker* bemerkte und für den Fall (3) (a) im einzelnen durchführte ([13]), besitzen unsere W-Kurven eine bemerkenswerte kinematische Erzeugungsweise. Durch einen allgemeinen Punkt (3.24) unserer W-Kurve geht nämlich je eine Erzeugende jeder Regelschar des Hyperboloids, die den Kreis bzw. die Hyperbel

$$x^2 \pm y^2 - 1 = 0, \quad z = 0 \tag{3.29}$$

in den beiden Punkten

$$x = \cos \Theta,\ y = \sin \Theta \quad \text{bzw.} \quad x = \operatorname{Cos} \Theta,\ y = \operatorname{Sin} \Theta \tag{3.30}$$

mit $\Theta = (\beta \pm \alpha)\, t$ treffen. Da es nur auf das Verhältnis $\omega = \dfrac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}$ der beiden „Winkelgeschwindigkeiten" ankommt (ω ist also die Invariante, von der unsere Figur noch abhängt), so gilt: *Unterwirft man je eine Erzeugende jeder Regelschar einer gewöhnlichen bzw. einer Hyperbel-Drehung mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten* 1 *und* ω, *so beschreibt ihr Schnittpunkt eine Bahnkurve unserer Gruppe. Strubecker* nennt die Bahnkurven bei (3) (a) räumliche *Ährenkurven*; im Fall (3) (b) können wir analog von *Hyperbel-Ährenkurven* sprechen. Abb. 5 veranschaulicht das Prinzip dieser kinematischen Erzeugung einer Bahnkurve.

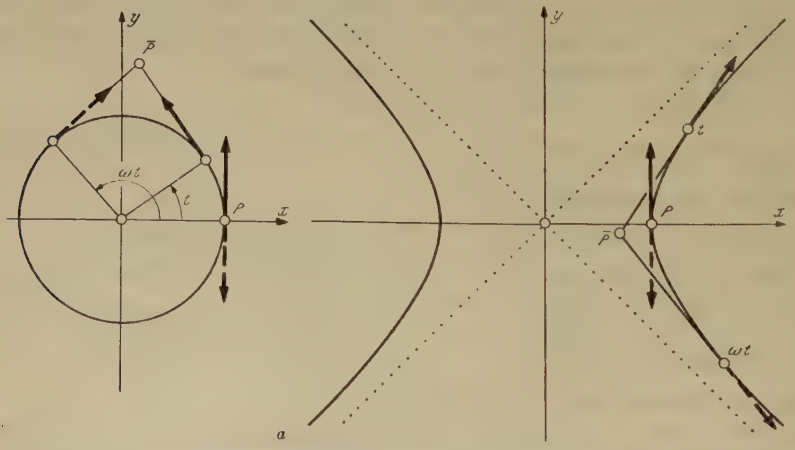

Abb. 5. Kinematische Erzeugungsweise der W-Kurven für die Fälle (3) (a), (b) im x, y-Grundriß. Die Grundrisse der beiden Erzeugendenscharen hüllen bei (a) den Kehlkreis, bei (b) die x, y-Meridianhyperbel des Fixhyperboloids ein. In beiden Fällen „dreht" sich im Ablauf der Gruppe eine Erzeugende der ersten Schar (fett ausgezogen), von P ausgehend, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 1, eine Erzeugende der zweiten Schar (fett gestrichelt), von P ausgehend, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Der Schnittpunkt dieser Erzeugenden (Grundriß $\overline{P}$) beschreibt die W-Kurve durch $P = (1, 0, 0)$. Die punktierten Geraden sind die Grundrisse der reellen Fixgeraden der Gruppe.

Während bei (3) (a) das Basisvierseit des Quadrikbüschels (3.26) nicht reell ist und demnach als einzige reelle eigentliche Fixgerade die z-Achse auftritt, ist dieses Vierseit bei (3) (b) reell und zerlegt jede Büschelquadrik in vier invariante Teilbereiche. Die Bahnkurven durchlaufen einen solchen Bereich von einem Eckpunkt zum gegenüberliegenden Eckpunkt (Abb. 6). Abb. 7 stellt einen der vier Teilbereiche mit

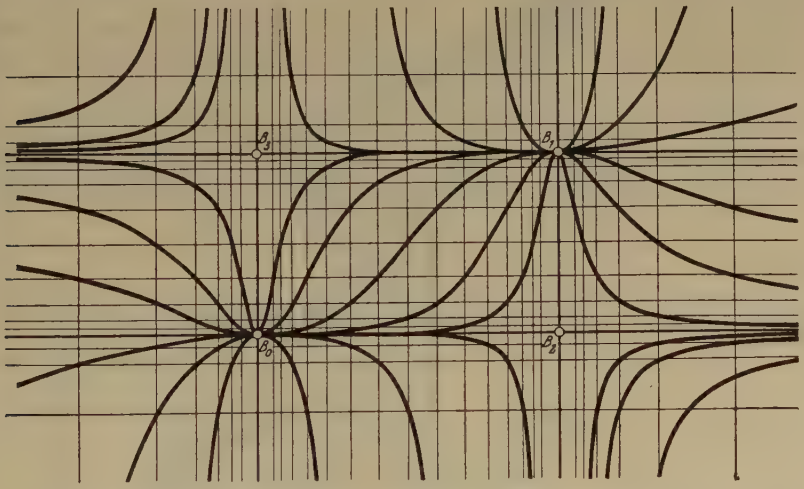

Abb. 6. Draufsicht auf das Basisvierseit B_0, B_2, B_1, B_3 im Falle (3) (b). Es sind die Erzeugenden und die W-Kurven eines Fixhyperboloids aus dem elementweise festen Quadrikbüschel (3.26) für einen Wert $\omega < 0$ gezeichnet. Das Basisvierseit zerlegt das Hyperboloid in vier für sich feste Teilbereiche. Die W-Kurven durchqueren jeweils einen Teilbereich vom einen Eckpunkt B_0 zum diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt B_1. Tangente aller W-Kurven in B_0 ist die Seite $B_0 B_2$, in B_1 die Seite $B_1 B_3$. Für $\omega > 0$ übernehmen die Punkte B_2, B_3 die Rolle der Punkte B_0, B_1 (vgl. Abb. 7).

zwei Scharen von Bahnkurven für zwei verschiedene Werte von ω dar. Für Fall (3) (a) können wir auf die zahlreichen Figuren bei *Strubecker* [13] verweisen.

Wir bemerken schon an dieser Stelle, daß die Fälle (3) bis (5) insofern eine einheitliche Betrachtungsweise erlauben, als sich die *Strubecker*sche kinematische Erzeugung der Bahnkurven in naheliegender Weise auf die folgenden Fälle verallgemeinern läßt. Man könnte die Kurven bei (4) und (5) also *Pseudo-Ährenkurven* nennen.

So wie bei den früheren Fällen (1) und (2) die Bahnkurven Möbiusgeometrische und Laguerre-geometrische Deutungen gestatteten, kann

man entsprechend in den folgenden Fällen (3) bis (5) Lie-geometrische Betrachtungen anstellen. Bildet man etwa in (3) (b) die Quadrik (3.27) auf Kreise der euklidischen ξ, η-Ebene ab, die die ξ-Achse senkrecht schneiden, indem man setzt

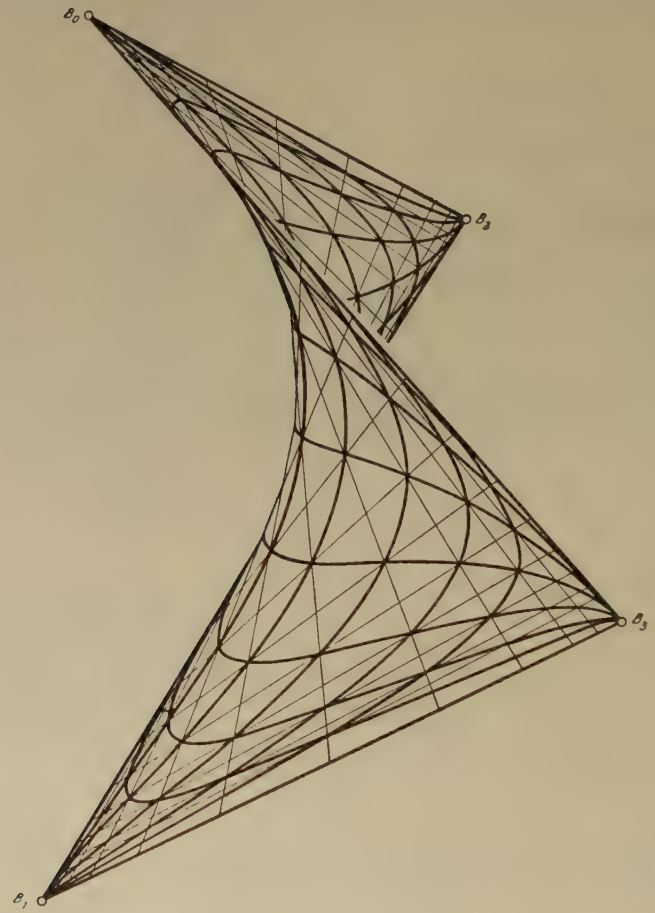

Abb. 7. Fixquadrik, Basisvierseit und W-Kurven im Falle (3) (b) für einen positiven und einen negativen Wert der Invarianten ω (vgl. auch Abb. 6).

$$\begin{aligned} \sigma\, q_0 &= 1 + \xi^2 - R^2 \\ \sigma\, q_1 &= 1 - \xi^2 + R^2 \\ \sigma\, q_2 &= 2\,\xi \\ \sigma\, q_3 &= 2\,R, \end{aligned} \tag{3.31}$$

so gehört zu den Projektivitäten (3.25) der Quadrik in sich in der ξ, η-Ebene die Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= e^{-\alpha\tau}(\xi \operatorname{Cos}\beta\tau + R \operatorname{Sin}\beta\tau) \\ \bar{R} &= e^{-\alpha\tau}(\xi \operatorname{Sin}\beta\tau + R \operatorname{Cos}\beta\tau). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Den W-Kurven auf der Quadrik entsprechen also in der Ebene Kreisscharen und deren Hüllkurven.

Wir werden diese Lie-geometrischen Überlegungen nicht im einzelnen durchführen. Sie sind auch deshalb weniger interessant, weil es sich dabei im Grunde um Lie-Geometrie auf der Geraden handelt.

(4) (a), (b) In diesen beiden Fällen, die sich als Grenzfälle von (3) (a) und (b) oder auch von (5) mit paarweise zusammenrückenden Fixpunkten auffassen lassen, gehen wir aus von der Kurve

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}(t) = \{\cos \alpha t, \sin \alpha t, t\cos \alpha t, t \sin \alpha t\} \\ \text{bzw.} \\ \mathfrak{x}(t) = \{\operatorname{Cos} \alpha t, \operatorname{Sin} \alpha t, t \operatorname{Cos} \alpha t, t \operatorname{Sin} \alpha t\} \end{gathered} \tag{3.33}$$

und der Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= q_0 \cos \alpha\tau - q_1 \sin \alpha\tau \\ \bar{q}_1 &= q_0 \sin \alpha\tau + q_1 \cos \alpha\tau \\ \bar{q}_2 &= (q_0 \cos \alpha\tau - q_1 \sin \alpha\tau)\tau + q_2 \cos \alpha\tau - q_3 \sin \alpha\tau \\ \bar{q}_3 &= (q_0 \sin \alpha\tau + q_1 \cos \alpha\tau)\tau + q_2 \sin \alpha\tau + q_3 \cos \alpha\tau \\ &\text{bzw.} \\ \bar{q}_0 &= q_0 \operatorname{Cos} \alpha\tau + q_1 \operatorname{Sin} \alpha\tau \\ \bar{q}_1 &= q_0 \operatorname{Sin} \alpha\tau + q_1 \operatorname{Cos} \alpha\tau \\ \bar{q}_2 &= (q_0 \operatorname{Cos} \alpha\tau + q_1 \operatorname{Sin} \alpha\tau)\tau + q_2 \operatorname{Cos} \alpha\tau + q_3 \operatorname{Sin} \alpha\tau \\ \bar{q}_3 &= (q_0 \operatorname{Sin} \alpha\tau + q_1 \operatorname{Cos} \alpha\tau)\tau + q_2 \operatorname{Sin} \alpha\tau + q_3 \operatorname{Cos} \alpha\tau \end{aligned} \tag{3.34}$$

mit dem Büschel von Fixhyperboloiden

$$q_0 q_3 - q_1 q_2 - \nu(q_0^2 \pm q_1^2) = 0. \tag{3.35}$$

Die W-Kurve (3.33) liegt auf der Büschelquadrik mit $\nu = 0$:

$$q_0 q_3 - q_1 q_2 = 0. \tag{3.36}$$

Legt man wie in (2) (a), (b) den W-Parameter durch

$$a = \mp 1, \quad b = 0, \quad c = -16 \tag{3.37}$$

fest, so wird

$$\alpha^2 = 5, \tag{3.38}$$

und es handelt sich wieder um *genau zwei bis auf Projektivitäten eindeutig festgelegte Kurven.*

Wir wollen wieder eine kinematische Erzeugungsweise unserer Bahnkurven (3.33) angeben. Dazu führt man zweckmäßig durch die Substitution

$$\hat{q}_0 = q_0 + q_3, \quad \hat{q}_1 = -q_1 + q_2, \quad \hat{q}_2 = q_0 - q_3, \quad \hat{q}_3 = q_1 + q_2 \tag{3.39}$$

die Quadrikgleichung (3.36) über in

$$\hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 - \hat{q}_1^2 - \hat{q}_0^2 = 0; \tag{3.40}$$

in den cartesischen Koordinaten (3.9) ist dies ein Rotationshyperboloid. Die beiden Erzeugenden der Quadrik durch einen allgemeinen Punkt unserer W-Kurve treffen den Kreis bzw. die Hyperbel

$$z = 0,\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad y = 0,\ x^2 - z^2 - 1 = 0 \tag{3.41}$$

in den Punkten

$$x = \cos \Theta_k,\ y = \sin \Theta_k \quad \text{bzw.} \quad x = \pm \operatorname{Cos} \Theta_k,\ z = \operatorname{Sin} \Theta_k, \tag{3.42}$$

wobei die $\Theta_k (k = 1, 2)$ bestimmt sind durch

$$\Theta_1 = 2\,a\,t \qquad \Theta_1 = -2\,a\,t$$
$$t = \operatorname{tg} \frac{\Theta_2}{2} \quad \text{bzw.} \quad t = \begin{cases} \operatorname{Tg}\ \Theta_2/2 \text{ für } |t| \leqslant 1 \\ -\operatorname{Ctg}\ \Theta_2/2 \text{ für } |t| \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.43}$$

Abb. 8 veranschaulicht diese kinematische Erzeugung im x, y- bzw. im x, z-Riß: *Die eine Erzeugende führt eine gewöhnliche bzw.*

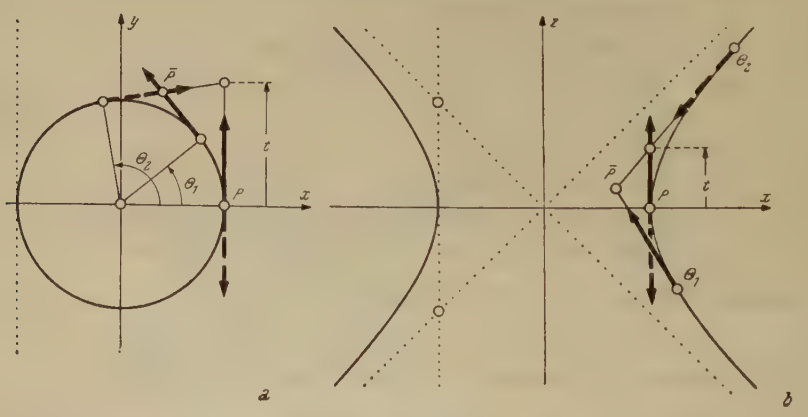

Abb. 8. Kinematische Erzeugungsweise der W-Kurven für die Fälle (4) (a), (b). (a) ist ein x, y-Grundriß, (b) ein x, z-Aufriß. In beiden Fällen „dreht" sich im Ablauf der Gruppe eine Erzeugende der ersten Schar (fett ausgezogen), von P ausgehend, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Theta_1/t = 2\,a$ bzw. $\Theta_1/t = -2\,a$, während der Riß einer Erzeugenden der zweiten Schar (fett gestrichelt) von P ausgehend so „rotiert", daß auf der Tangente $\Theta = 0$ eine Strecke der Länge t ausgeschnitten wird. Der Schnittpunkt dieser Erzeugenden (Grundriß $\bar{P}$) beschreibt die W-Kurve durch $P = (1, 0, 0)$. Die punktierten Geraden sind die Risse der reellen Fixgeraden der Gruppe.

eine Hyperbel-Drehung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit 2α *aus, die andere Erzeugende rotiert derart, daß im Riß auf der festen Tangente* $\Theta = 0$ *eine Strecke der Länge* t *ausgeschnitten wird.*

Schließlich zeigt Abb. 9 für den Fall (4) (b) den räumlichen Verlauf der Bahnkurven in der Draufsicht. Sie entspricht der früheren Abb. 6

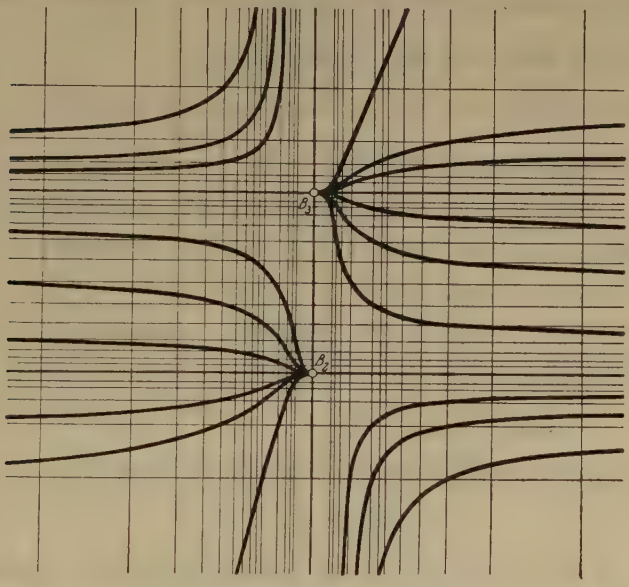

Abb. 9. Draufsicht auf das Fixhyperboloid und die W-Kurven im Falle (4) (b). Die doppeltzählende Fixgerade $B_2\,B_3$ und die beiden einfachen Fixgeraden durch B_2 und B_3 zerlegen die Quadrik in zwei Teilbereiche, die für sich fest sind. Vom ersten Fixpunkt B_2 ausgehend gelangen die W-Kurven jeweils über einen Teilbereich zum zweiten Fixpunkt B_3. Tangenten aller W-Kurven in B_2 und B_3 sind die einfachen Fixgeraden.

Abb. 9 erscheint auch anschaulich als Grenzfall von Abb. 6.

zu (3) (b) für paarweise zusammenfallende Fixpunkte und enthält neben der einen doppeltzählenden auch die beiden einfachen Fixgeraden.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft unserer Kurven (3.33) ist noch die folgende: *Die W-Kurven der Fälle* (4) (a) *und* (b) *sind die einzigen W-Kurven mit zwei verschiedenen doppeltzählenden Eigenwerten.*

Bei paarweise gleichen Eigenwerten lautet nämlich die charakteristische Gleichung wegen der Beziehung (1.13)

$$(\varrho - \varrho_0)^2 (\varrho + \varrho_0)^2 = \varrho^4 - 2\,\varrho_0^2\,\varrho^2 + \varrho_0^4 = 0.$$

Vergleicht man das mit (1.12), so folgt

$$b = 0, \quad c + 16\,a^2 = 0,$$

also (3.37) oder $a = b = c = 0$. Im letzteren Fall wäre aber $\varrho_0 = 0$ vierfacher Eigenwert.

Den genannten Satz werden wir später in (8) zu einer Aussage über W-Kurven erweitern, deren Gruppe genau zwei Fixpunkte besitzt.

(5) Die W-Kurve hat hier die Darstellung

$$\mathfrak{x}(t) = \{\mathrm{Cos}\,\alpha t \cos\beta t, \mathrm{Cos}\,\alpha t \sin\beta t, \mathrm{Sin}\,\alpha t \cos\beta t, \mathrm{Sin}\,\alpha t \sin\beta t\}, \tag{3.44}$$

die zugehörige Gruppe ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\bar{q}_0 &= (q_0 \cos\beta\tau - q_1 \sin\beta\tau)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\tau + (q_2 \cos\beta\tau - q_3 \sin\beta\tau)\,\mathrm{Sin}\,\alpha\tau \\
\bar{q}_1 &= (q_0 \sin\beta\tau + q_1 \cos\beta\tau)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\tau + (q_2 \sin\beta\tau + q_3 \cos\beta\tau)\,\mathrm{Sin}\,\alpha\tau \\
\bar{q}_2 &= (q_0 \cos\beta\tau - q_1 \sin\beta\tau)\,\mathrm{Sin}\,\alpha\tau + (q_2 \cos\beta\tau - q_3 \sin\beta\tau)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\tau \\
\bar{q}_3 &= (q_0 \sin\beta\tau + q_1 \cos\beta\tau)\,\mathrm{Sin}\,\alpha\tau + (q_2 \sin\beta\tau + q_3 \cos\beta\tau)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\tau
\end{aligned} \tag{3.45}$$

und hat das Fixbüschel

$$q_0\,q_3 - q_1\,q_2 - \nu(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) = 0. \tag{3.46}$$

Die Kurve (3.44) liegt auf der Büschelquadrik mit $\nu = 0$:

$$q_0\,q_3 - q_1\,q_2 = 0. \tag{3.47}$$

Wie in (4) (a), (b) führen wir mittels (3.39) diese Quadrik über in das Rotationshyperboloid (3.40) und bestimmen wieder die beiden Erzeugenden durch den allgemeinen Punkt unserer W-Kurve. Man findet hier für deren Schnittpunkte (3.42) mit (3.41) die Θ-Werte

$$\begin{aligned}
&\Theta_1 = 2\,\beta\,t && \hat{\Theta}_2 = 2\,\alpha\,t \\
&\mathrm{Tg}\,\alpha t = \mathrm{tg}\,\frac{\Theta_2}{2} \quad \text{bzw.} && -\mathrm{tg}\,\beta t = \begin{cases} \mathrm{Tg}\ \hat{\Theta}_1/2 \text{ für } |\mathrm{tg}\,\beta t| \leqslant 1 \\ -\mathrm{Ctg}\ \hat{\Theta}_1/2 \text{ für } |\mathrm{tg}\,\beta t| \geqslant 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Unsere W-Kurve erlaubt also auf zweierlei Weise eine kinematische Erzeugung, wie durch Abb. 10 in Grund- und Aufriß veranschaulicht wird: *Die eine Erzeugende führt eine gewöhnliche (Hyperbel-)Drehung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit* $2\,\beta$ $(2\,\alpha)$ *aus, die andere Erzeugende rotiert derart, daß im Riß auf der festen Tangente* $\Theta = 0$ *Strecken der Länge* $\mathrm{Tg}\,\alpha\,t$ $(\mathrm{tg}\,\beta\,t)$ *ausgeschnitten werden.*

Aus der Figur gewinnt man auch Aufschluß über den räumlichen Verlauf der Kurve: Sie besteht aus unendlich vielen Ästen, deren jeder

ganz in einem Flächenstück zwischen zwei Erzeugenden derselben Schar verläuft. Die Abstände der begrenzenden windschiefen Erzeugenden voneinander und von einer Fixgeraden gehen nach Null.

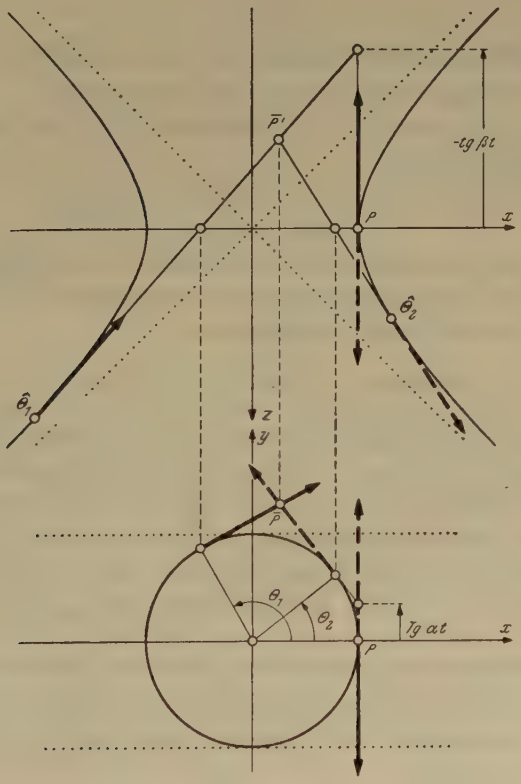

Abb. 10. Zwei kinematische Erzeugungsweisen der W-Kurven von Fall (5) in Grund- (unten) und Aufriß (oben).

Hier „dreht" sich im Ablauf der Gruppe eine Erzeugende der ersten Schar (fett ausgezogen) von P ausgehend derart, daß im Grundriß die Winkelgeschwindigkeit $\Theta_1/t = 2\,\beta$ konstant ist, während im Aufriß auf der Tangente $\Theta = 0$ die Strecke $\mathrm{tg}\,\beta t$ ausgeschnitten wird. Die Erzeugende der zweiten Schar (fett gestrichelt) „rotiert" von P ausgehend im Aufriß mit fester Winkelgeschwindigkeit $\hat{\Theta}_2/t = 2\,\alpha$, während im Grundriß auf der Tangente $\Theta = 0$ die Strecke $\mathrm{Tg}\,\alpha t$ ausgeschnitten wird. (Die gestrichelten Pfeile im Aufriß wurden der Übersichtlichkeit wegen entgegengesetzt orientiert.) Der Schnittpunkt der beiden Erzeugenden (Grundriß $\overline{P}$, Aufriß $\overline{P}'$) beschreibt wieder die W-Kurve durch $P = (1, 0, 0)$.

Die punktierten Geraden sind die Risse der beiden reellen Fixgeraden der Gruppe.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Kennzeichnung aller soeben besprochenen W-Komplexkurven.

Nach *G. Bol*[9] liegt eine Raumkurve genau dann auf einer Quadrik, wenn

$$5\,a' - 2\,b = 0,\ a'' - 18\,a^2 + 2\,c = \text{const.} \tag{3.49}$$

Dabei ist der Parameter so gewählt, daß die Seitenebene $\mathfrak{T} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{z})$ des Begleittetraeders Tangentialebene der Quadrik ist.

Dual analog berühren die Schmiegebenen einer Raumkurve genau dann eine Quadrik, wenn

$$5\,a' + 2\,b = 0,\ a'' - 18\,a^2 + 2\,c = \text{const.} \tag{3.50}$$

Diesmal ist t so gewählt, daß der Eckpunkt t des Begleittetraeders Berührungspunkt der Schmiegebene mit der Quadrik ist.

(3.49) und (3.50) führen zusammen auf

$$a = \text{const}, \quad b = 0, \quad c = \text{const}. \tag{3.51}$$

Umgekehrt gilt für W-Komplexkurven bei Wahl eines W-Parameters (3.51), also auch (3.49) und (3.50). Also: *Die W-Komplexkurven sind die einzigen Raumkurven, die* (*a*) *auf einer Quadrik liegen und deren Schmiegebenen eine Quadrik berühren, und für die* (*b*) *der Parameter sich so wählen läßt, daß die Seitenebene* $\mathfrak{T}$ *und die Ecke* t *des Begleittetraeders die Berührungselemente sind.* Die Bedingung (*b*) ist dabei wesentlich.

4. Die W-Kurven auf einem Kegel, die keine Komplexkurven sind.

W-Kurven auf Kegeln, deren quadratische Form nicht fest ist, werden durch (2.21) mit $b \neq 0$, $\lambda \neq 0$ charakterisiert; löst man (2.21) nach a und c auf, so erhält man

$$\begin{aligned} 20\,a &= \quad 5\,\lambda^2 \quad - \quad 4\,b\,\lambda^{-1} \\ 25\,c &= 9\,b^2\,\lambda^{-3} + 15\,b\,\lambda. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die charakteristische Gleichung (1.12) ein, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho^4 - \frac{1}{2}\,(5\,\lambda^2 - 4\,b\,\lambda^{-1})\,\varrho^2 - 2\,b\,\varrho + \frac{1}{16}\,(9\,\lambda^4 - 24\,b\,\lambda) \\ &= (\varrho + \frac{1}{2}\,\lambda)\,(\varrho - \frac{3}{2}\,\lambda)\,(\varrho^2 + \lambda\,\varrho - \frac{3}{4}\,\lambda^2 + 2\,b\,\lambda^{-1}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

[9] [3] § 57.

Beim Übergang zu einem anderen W-Parameter ändert sich nun λ gemäß $\lambda^* = \varphi^{-1}\lambda$, so daß wir den W-Parameter eindeutig bis auf Parametertransformationen der Art (1.7) durch

$$\lambda = -2 \tag{4.3}$$

festlegen können. Dann tritt an die Stelle von (4.2) einfacher

$$(\varrho - 1)(\varrho + 3)(\varrho^2 - 2\varrho - b - 3) = 0. \tag{4.4}$$

Außer den Eigenwerten $\varrho_0 = 1$, $\varrho_1 = -3$ hat man demnach zwei konjugiert komplexe, reelle zusammenfallende oder verschiedene Eigenwerte ϱ_2, ϱ_3, je nachdem

$$b \gtreqless -4. \tag{4.5}$$

Wenn wir noch

$$\beta = +\sqrt{|b+4|} \tag{4.6}$$

setzen und auch auf das Zusammenfallen von Eigenwerten achten, so ergeben sich die vier in der *Tabelle 2* aufgeführten Fälle. Sie sind differentialgeometrisch durch den Wert der Invarianten b (nach (4.1) berechnet man dann a und c) völlig gekennzeichnet, wenn ein W-Parameter mit (4.3) gewählt ist.

Die Laguerre-geometrische Deutung der vier Kurventypen führt, da die quadratische Form des Kegels nicht fest ist, auf die W-Kurven der weiteren Laguerre-Gruppe.

Tabelle 2

		Wertebereich der Invarianten b und β	Typus der quadratischen Fläche	Eigenwerte ϱ_k			
(6)	(a)	$b < -4$	Kegel	1	-3	$1+i\beta$	$1-i\beta$
	(b)	$b > -4, \beta \neq 4$		1	-3	$1+\beta$	$1-\beta$
(7)		$b > -4, \beta = 4$	Kegel	1	-3	-3	5
(8)		$b = -4$	Kegel	1	-3	1	1

(6) (a), (b) Diese beiden Fälle gestatten eine den früheren (2) (a), (b) ganz analoge gemeinsame Behandlung. Wir wählen die Kurvendarstellung

$$\mathfrak{x}(t) = e^t\{1, e^{-4t}, \cos\beta t, \sin\beta t\} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{x}(t) = e^t\{1, e^{-4t}, \operatorname{Cos}\beta t, \operatorname{Sin}\beta t\}. \tag{4.7}$$

Die zugehörige Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= e^{\tau} \quad q_0 \\ \bar{q}_1 &= e^{-3\tau} q_1 \\ \bar{q}_2 &= e^{\tau}(q_2 \cos\beta\tau - q_3 \sin\beta\tau) \\ \bar{q}_3 &= e^{\tau}(q_2 \sin\beta\tau + q_3 \cos\beta\tau) \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \bar{q}_0 &= e^{\tau} \quad q_0 \\ \bar{q}_1 &= e^{-3\tau} q_1 \\ \bar{q}_2 &= e^{\tau}(q_2 \operatorname{Cos}\beta\tau + q_3 \operatorname{Sin}\beta\tau) \\ \bar{q}_3 &= e^{\tau}(q_2 \operatorname{Sin}\beta\tau + q_3 \operatorname{Cos}\beta\tau) \end{aligned} \tag{4.8}$$

läßt dann die Kegel des Büschels

$$q_2^2 \pm q_3^2 - \nu\, q_0^2 = 0 \tag{4.9}$$

mit gemeinsamer Spitze fest.

Dabei ist zu beachten, daß wir bei (6) (b) für $\beta = 8$ die Eigenwerte $1, -3, 9, -7$ erhalten und somit auf die Raumkurve vierter Ordnung (B) zurückkommen, die sich hier also einordnet. In diesem Falle tritt, wie wir wissen, neben (4.9) noch ein weiteres Büschel von Fixkegeln auf.

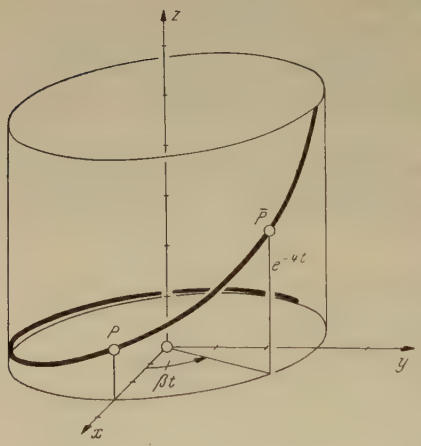

Abb. 11. „*Exponentialschraublinie*" auf einem Kreiszylinder als W-Kurve im Falle (6) (a). Ein Punkt $\bar{P}$ der Kurve entsteht aus dem Punkt $P = (1, 0, 1)$, indem man dessen Mantellinie um den Winkel βt dreht und auf ihr den „Hub" $z = e^{-4t}$ aufträgt. In der Zeichnung ist $\beta < 0$ gewählt.

Unsere W-Kurve (4.7) liegt auf dem Fixkegel (4.9) mit $\nu = 1$:

$$q_2^2 \pm q_3^2 - q_0^2 = 0, \tag{4.10}$$

das ist in den cartesischen Koordinaten (3.9) der Zylinder

$$x^2 \pm y^2 - 1 = 0. \tag{4.11}$$

Kinematisch entsteht unsere Kurve (und analog jede andere Bahnkurve) also, wenn man eine Zylindererzeugende einer gewöhnlichen bzw. hyperbolischen Drehung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit β unterwirft und auf ihr den „Hub" $z = e^{-4t}$ aufträgt („Exponentialschraublinie", vgl. Abb. 11 zu (6) (a)).

Eine andere metrische Deutung unserer Kurven liefern die cartesischen Koordinaten

$$x = \frac{q_2}{q_1}, \quad y = \frac{q_3}{q_1}, \quad z = \frac{q_0}{q_1}. \tag{4.12}$$

Im Fall (6) (a) sind jetzt (4.9) Rotationskegel um die z-Achse mit der Spitze im Ursprung. Die Grundrisse der Bahnkurven der Gruppe sind logarithmische Spiralen, die Bahnkurven selbst also *zylindrokonische Schraublinien*[10]. Diese sind bekanntlich *Loxodromen* der Erzeugendenschar ihrer Kegel; unsere Gruppe besitzt ja den Fixkegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ und läßt die uneigentliche Ebene fest, besteht also aus Ähnlichkeiten.

Wie schon früher bei (2) (a), (b) überträgt sich auch hier diese Eigenschaft auf Fall (6) (b), wenn man statt der euklidischen Metrik die *Lorentz-Minkowski*-Metrik mit der Maßform $x^2 - y^2 + z^2$ heranzieht. Wieder sind die Bahnkurven von (6) (b) Loxodromen ihrer Kegel im Sinne der Metrik.

Um zu einer Laguerre-geometrischen Deutung zu gelangen, ziehen wir wieder die Abbildung (3.20) heran, und die Gruppe (4.8) geht über in

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u\cos\beta\tau - v\sin\beta\tau & \bar{u} &= \frac{1}{N}(\operatorname{Sin}\beta\tau + u\operatorname{Cos}\beta\tau) \\ \bar{v} &= u\sin\beta\tau + v\cos\beta\tau \quad \text{bzw.} & \bar{v} &= \frac{1}{N}\cdot v \\ \bar{w} &= w\,e^{-4\tau} & \bar{w} &= \frac{1}{N}\cdot w\,e^{-4\tau}, \\ & & N &= \operatorname{Cos}\beta\tau + u\operatorname{Sin}\beta\tau. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Bestimmen wir insbesondere diejenige Geradenschar, die der Kurve (4.7) entspricht, so finden wir als deren Hüllkurve

$$\begin{aligned} x &= -e^{-4t}\left(\cos\beta t + \frac{4}{\beta}\sin\beta t\right) & x &= e^{-4t}\frac{4}{\beta\operatorname{Cos}\beta t} \\ & \text{bzw.} & & \\ y &= -e^{-4t}\left(\sin\beta t - \frac{4}{\beta}\cos\beta t\right) & y &= -e^{-4t}\left(1 + \frac{4}{\beta}\operatorname{Tg}\beta t\right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Im Fall (6) (a) ist das eine *logarithmische Spirale* (Abb. 12 a); bei (6) (b) handelt es sich um eine *verallgemeinerte Traktrix* insofern, als zwar nicht mehr der Tangentenabschnitt zwischen Kurve und y-Achse, wohl aber dessen Verhältnis zum Abschnitt auf der y-Achse einen konstanten Wert, nämlich $4/\beta$ hat (Abb. 12 b).

---

[10] Enzykl. Math. Wiss. III, D 4, S. 253.

Eine analoge Deutung für die Invariante $4/\beta$ gestattet übrigens auch die logarithmische Spirale von (6) (a) (Abb. 12 a).

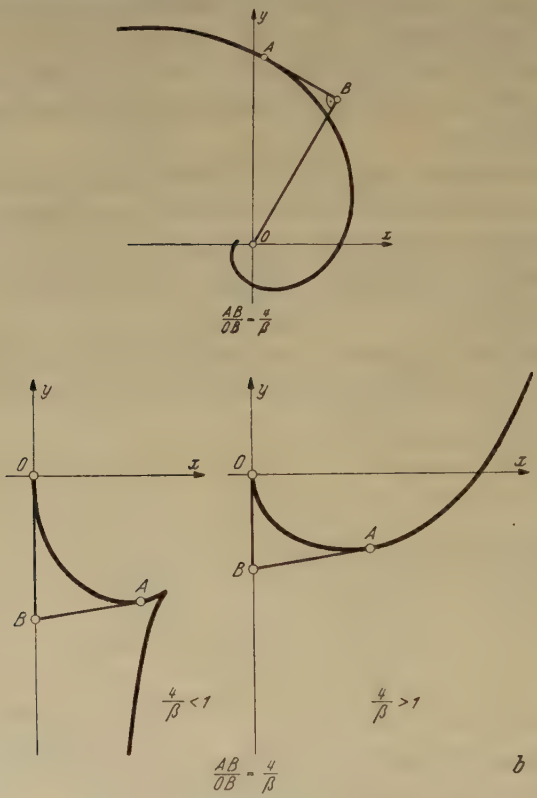

Abb. 12. Laguerre-geometrische Deutung der W-Kurven in den Fällen (6) (a), (b). Da diese keine Komplexkurven sind, ergeben sich W-Kurven der *erweiterten* Laguerre-Geometrie, und zwar bei (a) *logarithmische Spiralen*, bei (b) *verallgemeinerte Traktrizen*, bei denen das Verhältnis des Tangentenabschnittes AB zum Abschnitt OB auf der y-Achse den konstanten Wert $4/\beta$ hat. Je nachdem $4/\beta$ kleiner oder größer als 1 ist, besitzen die Kurven eine Spitze oder keine Spitze. Für $4/\beta < 1$ ist die y-Achse Asymptote der Kurven.

Die allgemeine W-Kurve entsteht bei gleichem β aus der gezeichneten bei (a) durch Drehung um O, bei (b) durch Streckung aus O, gegebenenfalls mit einer Spiegelung an der x-Achse.

Die allgemeine Hüllkurve von (4.13) entsteht bei gleichem β aus unserer speziellen bei (6) (a) durch Drehung um den Ursprung, bei (6) (b) durch Streckung aus O, gegebenenfalls mit einer Spiegelung an der x-Achse.

(7) Wir gehen hier aus von der Kurve

$$\mathfrak{x}(t) = e^t\{1, t\,e^{-4t}, \operatorname{Cos} 4\,t, \operatorname{Sin} 4\,t\} \tag{4.15}$$

mit der Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= e^\tau q_0 \\ \bar{q}_1 &= e^{-3\tau}(q_1 + \tau\, q_2 - \tau\, q_3) \\ \bar{q}_2 &= e^\tau(q_2 \operatorname{Cos} 4\,\tau + q_3 \operatorname{Sin} 4\,\tau) \\ \bar{q}_3 &= e^\tau(q_2 \operatorname{Sin} 4\,\tau + q_3 \operatorname{Cos} 4\,\tau) \end{aligned} \tag{4.16}$$

und dem Büschel von Fixkegeln

$$q_2^2 - q_3^2 - \nu\, q_0^2 = 0. \tag{4.17}$$

Unsere Kurve liegt auf dem Kegel mit $\nu = 1$, also bei Verwendung der cartesischen Koordinaten (3.9) auf dem Zylinder (4.11) (mit dem unteren Vorzeichen) und läßt sich wie in (6) (b) kinematisch erzeugen, wenn man die Winkelgeschwindigkeit 4 und den Hub $z = t\,e^{-4t}$ wählt. Ganz entsprechend verfährt man bei allen anderen Bahnkurven.

Alle Kurven vom Typ (7) sind projektiv gleichwertig, da keine willkürlichen Konstanten mehr verfügbar sind. Die Kurveninvarianten sind für den gewählten W-Parameter durch

$$5\,a = 11,\ b = 12,\ 25\,c = -36 \tag{4.18}$$

festgelegt.

Eine Laguerre-geometrische Deutung ist in diesem und im folgenden Fall in ähnlicher Weise möglich wie früher, führt aber auf kompliziertere Verhältnisse.

(8) Wählen wir in diesem zwischen (6) (a) und (b) liegenden Grenzfall die Kurve in der Darstellung

$$\mathfrak{x}(t) = e^t\{1, e^{-4t}, t, t^2\}, \tag{4.19}$$

so hat die zugehörige Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= e^\tau q_0 \\ \bar{q}_1 &= e^{-3\tau} q_1 \\ \bar{q}_2 &= e^\tau(q_0\,\tau + q_2) \\ \bar{q}_3 &= e^\tau(q_0\,\tau^2 + 2\,q_2\,\tau + q_3) \end{aligned} \tag{4.20}$$

das Büschel von Fixkegeln

$$q_2^2 - q_0\,q_3 - \nu\, q_0^2 = 0. \tag{4.21}$$

Da die Kurveninvarianten durch

$$5\,a = 3,\ b = -4,\ 25\,c = 156 \tag{4.22}$$

bestimmt sind, sind wieder alle Kurven unseres Typs (8) projektiv gleichwertig.

Die Kurve (4.19) liegt auf dem Kegel mit $\nu = 0$, das ist in den cartesischen Koordinaten (3.9) der Zylinder

$$x^2 - y = 0, \tag{4.23}$$

und unsere Kurve ist also der Schnitt dieses parabolischen Zylinders mit dem Zylinder $z = e^{-4x}$. Ganz Entsprechendes gilt für alle anderen Bahnkurven.

Analog zu (6) (a) und (b) erhalten wir wieder eine Deutung der Bahnkurven als *Loxodromen* ihrer Kegel bei Verwendung der cartesischen Koordinaten (4.12), wenn man als absolutes Gebilde der Metrik etwa den Fernkegelschnitt des Kegels $\nu = 0$ wählt.

Wir bemerken noch: *Unsere W-Kurve ist die einzige W-Kurve mit einem dreifachen Eigenwert.*

Der dreifache Eigenwert ist nicht Null, da er sonst sogar vierfach zählte; denkt man ihn zu 1 normiert, was durch Wahl eines geeigneten W-Parameters möglich ist, so hat man wegen der Beziehung (1.13) die charakteristische Gleichung

$$(\varrho - 1)^3 (\varrho + 3) = \varrho^4 - 6\,\varrho^2 + 8\,\varrho - 3 = 0, \tag{4.24}$$

aus der man sofort (4.22) abliest.

Faßt man dieses Ergebnis und den Satz am Ende von (4) (a), (b) zusammen, so gilt: *Die einzigen W-Kurven, deren Gruppe genau zwei Fixpunkte besitzt, sind die drei Kurven der Typen* (4) (a), (b) und (8).

5. Einige spezielle W-Quadrikkurven. Wir haben die Einteilung unserer W-Kurven auf Quadriken danach getroffen, ob sie Komplexkurven sind ($b = 0$) oder nicht. Aber auch das Verschwinden der beiden anderen Invarianten a und c der Kurventheorie hat eine (in unserem Zusammenhang allerdings geringere) geometrische Bedeutung.

Das Verschwinden von c charakterisiert die Koinzidenzkurven[11]. Für $b = c = 0$ liegt eine Raumkurve dritter Ordnung vor. Für $c = 0$, $b \neq 0$ erhalten wir nach (4.1), (4.3)

$$3\,a = 7, \qquad 3\,b = 40, \qquad c = 0 \tag{5.1}$$

oder einfacher nach (1.3)

$$a^* = 21, \qquad b^* = 360, \qquad c^* = 0. \tag{5.2}$$

[11] Vgl. [3], § 47.

Es gibt genau eine nichtkubische W-Koinzidenzkurve auf einer Quadrik. Die Quadrik ist ein Kegel, die Kurve ist vom Typ (6) (b).

Das Verschwinden von a kennzeichnet diejenigen unter unseren W-Kurven, deren Relativbinormalen erster Art $(\mathfrak{x}\ \mathfrak{z})$ bei Wahl eines W-Parameters eine Torse bilden. Denn die Torsenbedingung

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}', \mathfrak{z}') = (\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}, 3\,a\,\mathfrak{y}) = 3\,a(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

führt auf $a = 0$. Für $a = b = 0$ $(c \neq 0)$ erhalten wir zwei Kurven, die als Grenzfälle in (1) bzw. (5) jeweils für $\alpha = \beta$ miterfaßt sind. Für $a = 0$, $b \neq 0$ liefert (4.1)

$$a = 0, \quad b = -10, \quad c = 21, \tag{5.3}$$

also eine Kurve vom Typ (6) (a).

Es gibt jeweils genau eine nichtkubische W-Kurve auf einer Quadrik vom Typus der Kugel, des einschaligen Hyperboloids und des Kegels, für die die zu einem W-Parameter gehörigen Relativbinormalen Torsen bilden.

Literatur

[1] *M. Barner*, Geradengeometrische Kennzeichnung der W-Kurven des projektiven Raumes. Arch. der Math. **6**, 462—470 (1955).

[2] *W. Blaschke*, Differentialgeometrie III (Kreise und Kugeln) 1929.

[3] *G. Bol*, Projektive Differentialgeometrie I, Göttingen 1950.

[4] *F. Klein* und *S. Lie*, Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. C. R. **72**, 1222—1226, 1275—1279 (1870).

[5] *F. Klein* und *S. Lie*, Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Ann. **4**, 50—84 (1871).

[6] *S. Lie — Scheffers*, Vorlesungen über Differentialgleichungen. Leipzig 1891.

[7] *H. Mohrmann*, Bestimmung aller algebraischen W-Kurven. Math. Ann. **89**, 260—271 (1922).

[8] *H. Mohrmann*, Über die algebraischen W-Kurven im r-dimensionalen Raum. Rend. Palermo **47**, 153—181 (1923).

[9] *H. Schatz*, Über die Geometrie von Laguerre XI. Monatsh. Math. **36**, 357—386 (1929).

[10] *E. Schubarth*, Bestimmung der W-Kurven. Verh. Naturf. Ges. Basel **38**, 454—475 (1927).

[11] *E. Schubarth*, Sur les courbes admettant un groupe de transformations de Moebius. Enseignement math. **25**, 234—239 (1926).

[12] *K. Strubecker*, Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. **38**, 63—84 (1931).

[13] *K. Strubecker*, Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sitzber. Wien **139**, 421—450 (1930).

[14] *K. Strubecker*, Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzber. Wien **140**, 545—578 (1931).

[15] *W. Wunderlich*, Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzber. Wien **155**, 309—331 (1947).

[16] *W. Wunderlich*, Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken. Mat. Tidsskrift B, 9—26 (1951).

[17] *W. Wunderlich*, Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel. Monatsh. Math. **61**, 277—311 (1957).

Eine Bemerkung zum Wilsonschen Satze

Von

Othmar Zaubek, Wien

(Eingegangen am 21. Mai 1960)

Dem mir bekannten Schrifttum zufolge, scheint ein einfacher Satz, welcher in einem gewissen Sinne als eine Verallgemeinerung des Wilsonschen Satzes aufgefaßt werden kann, nur wenig oder gar nicht bekannt zu sein, so daß ich diesen Satz hier mit zwei Anwendungen bringen will.

Ist p eine natürliche Primzahl, so kann $(p-1)!$ als das Produkt aller Reste eines bestimmten vereinfachten (zu p teilerfremden) Restsystems nach dem Modul p aufgefaßt werden. Anderseits hat die Bestimmungskongruenz $x^2 \equiv 1(p)$ für $p > 2$ genau zwei mod. p inkongruente Lösungen, so daß der Satz von Wilson auch in der folgenden Form ausgesprochen werden kann: Ist P das Produkt aller Reste eines vereinfachten Restsystems nach einer rationalen Primzahl p als Modul, m die Anzahl der mod. p inkongruenten Lösungen von $x^2 \equiv 1(p)$, ist ferner $s = 1$ für $|p| \leqq 2$ und $s = m/2$ für $|p| > 2$, so ist $P \equiv (-1)^s (p)$.

In dieser Form nun gestattet der Satz eine Verallgemeinerung auf einen beliebigen, rationalen ganzzahligen Modul p. Darüber hinaus kann dieser Satz noch für gewisse Ideale bewiesen werden. Diese Verallgemeinerungen beruhen hauptsächlich auf dem ganz einfachen Satz der Gruppentheorie, wonach es bei einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ zu jeder Anordnung $z_1, z_2, \ldots z_m$ aller Elemente zweiter, bzw. höchstens zweiter Ordnung von $\mathfrak{G}$, es eine Anordnung $a_1, a_2, \ldots a_n$ aller Elemente von $\mathfrak{G}$ gibt, so daß $a_1 a_2 \ldots a_n = z_1 z_2 \ldots z_m$ und gleichzeitig für jedes ganzrationale g $a_1^{2g} a_2^{2g} + \ldots a_n^{2g} g_n^2 = e$ ist, wobei e das Einselement von $\mathfrak{G}$ ist.

Wir wollen zweiseitige Ideale in Ringen heranziehen. Sind A und B zweiseitige Ideale im Ring E, so verstehen wir in üblicher Weise unter dem größten gemeinsamen Teiler $(A, B) = (B, A)$ von A und B, das von A und B in E erzeugte zweiseitige Ideal, also den Durchschnitt aller A und B i. S. der Mengenlehre umfassenden, zweiseitigen Ideale in E. Ist $(A, B) = E$, so heißen in üblicher Weise A und B teilerfremd.

Ist E ein Ring mit Einselement, so gilt, wie man ähnlich wie im Falle, daß E kommutativ ist, leicht zeigt: Sind A und B zwei teilerfremde zweiseitige Ideale in E, so ist für jedes zweiseitige Ideal C in E $(A, C) = (A, BC) = (A, CB)$. Im kommutativen Ring E mit Einselement gilt außerdem: Ist a ein Element aus E, für welches $(a, B) = E$ ist, so ist für jedes $c \varepsilon E$ $(ac, B) = (c, B)$. Da diese wichtige Eigenschaft auch bei unseren Entwicklungen benötigt wird, wollen wir alle zweiseitigen Ideale M in E, für welche für jedes $a \varepsilon E$ mit $(a, M) = E$ und für jedes $b \varepsilon E$ stets $(ab, M) = (ba, M) = (b, M)$ ist besonders kennzeichnen und sie gewöhnliche Ideale in E nennen. Bei dieser Ausdrucksweise ist daher jedes gewöhnliche Ideal in E ein zweiseitiges Ideal in E.

Wir nennen entsprechend eine Restklasse R nach dem zweiseitigen Ideal M eine zu M teilerfremde Restklasse, wenn jedes Element r aus R teilerfremd zu M, also $(r, M) = E$ ist[1]. Ferner wollen wir die Menge aller zu M teilerfremden Restklassen ein vereinfachtes Restklassensystem nach M nennen.

Man zeigt weiter leicht, daß für zweiseitige Ideale das übliche Rechnen mit Kongruenzen gilt und daß man daher als Produkt AB zweier Restklassen A und B nach dem zweiseitigen Ideal M diejenige Restklasse nach M erklären kann, welche mit $a \varepsilon A$ und $b \varepsilon B$ das Produkt ab enthält. Entsprechend wird BA erklärt. Diese Produktbildung nennen wir kurz die Restklassenmultiplikation φ.

Für die in Aussicht genommene Verallgemeinerung des Wilsonschen Satzes ist der folgende Satz wichtig:

Satz 1. *Ist E ein Ring und M ein gewöhnliches Ideal in E und ist das vereinfachte Restklassensystem $\mathfrak{R}$ nach M endlich und nicht leer, so ist $\mathfrak{R}$ mit der Restklassenmultiplikation φ als Zusammensetzungsvorschrift eine Gruppe $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\varphi$. Ist insbesondere E kommutativ, so ist $\mathfrak{R}_\varphi$ abelsch.*

Beweis. Da M ein gewöhnliches Ideal in E ist, ist M ein zweiseitiges Ideal in E und daher kann die Restklassenmultiplikation φ für je zwei Restklassen nach M erklärt werden. Da die Multiplikation in E als Multiplikation in einem Ring assoziativ ist, ist, wie man leicht zeigt, auch die in $\mathfrak{R}$ erklärte Zusammensetzungsvorschrift φ assoziativ. Ist insbesondere E kommutativ, so ist φ außerdem kommutativ.

Da M ein gewöhnliches Ideal in E ist, folgt aus $P \varepsilon \mathfrak{R}$, $Q \varepsilon \mathfrak{R}$ und $p \varepsilon P$, $q \varepsilon Q$, daß pq teilerfremd zu M ist und daher ist das Restklassen-

[1] Man zeigt leicht, daß der Satz gilt: Die Restklasse R nach dem zweiseitigen Ideal M ist dann und nur dann teilerfremd zu M, wenn R mindestens ein zu M teilerfremdes Element enthält.

produkt PQ von P und Q, als diejenige Restklasse nach M, welche pq enthält, eine Restklasse aus $\mathfrak{R}^1$. Damit ist die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{R}_\varphi$ nachgewiesen. Da $\mathfrak{R}$ eine endliche Menge ist, braucht daher nach einem einfachen Satz der Gruppentheorie zum Nachweis, daß $\mathfrak{R}_\varphi$ eine Gruppe ist nur mehr gezeigt werden, daß für je drei Elemente P, Q, R aus $\mathfrak{R}$, für welche $PQ = PR$ oder $QP = RP$ ist, $Q = R$ folgt. Diese Eigenschaft kann, wie folgt gezeigt werden: Ist $p \varepsilon P$, $q \varepsilon Q$ und $r \varepsilon R$ und $PQ = PR$, so ist $pq \equiv pr(M)$ oder $p(q - r) \varepsilon M$. Weil M ein gewöhnliches Ideal ist und nach der Erklärung von $\mathfrak{R}$ $(p, M)=E$ ist, ist $(p(q - r), M) = (q - r, M)$. Dies gibt mit $p(q - r) \varepsilon M$ $q \equiv r(M)$, also $Q = R$. Entsprechend verläuft der Beweis, wenn $QP = RP$ ist.

Ist $\mathfrak{R}$ nicht endlich, so braucht $\mathfrak{R}_\varphi$ keine Gruppe zu sein, selbst dann nicht, wenn E ein Integritätsbereich mit Einselement und M Primideal in E ist. Ein einfaches Beispiel ist das Primideal (x) im Integritätsbereich der ganzrationalen Funktionen einer Unbestimmten x über dem Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen.

Für zweiseitige Ideale kann der Begriff des Primideals so verallgemeinert werden, daß dieser für kommutative Ringe mit dem üblichen Begriff des Primideals übereinstimmt. Wir wollen daher allgemein unter einem Primideal im Ring E ein zweiseitiges Ideal in E verstehen, dessen Restklassenring keine echten Nullteiler hat.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die in Aussicht genommene Verallgemeinerung des Wilsonschen Satzes leicht beweisen.

Satz 2. *Ist E ein Ring und M ein gewöhnliches Ideal in E und ist das vereinfachte Restklassensystem $\mathfrak{R}$ nach M endlich und nicht leer, ist ferner $\varrho = \{r_1, r_2, \ldots r_n\}$ ein beliebiges Repräsentantensystem von $\mathfrak{R}$ und R_1 das nach Satz 1 existierende Einselement von $\mathfrak{R}_\varphi$, so gibt es stets mindestens eine Anordnung $r_1', r_2' \ldots r_n'$ dieser Repräsentanten, so daß, wenn m* eine natürliche Zahl ist und $p = r_1' r_2' \ldots r_n'$ *und q_m gesetzt wird: $r_1'^{2m} r_2'^{2m} \ldots r_n'^{2m}$.*

1. *Für jedes natürliche m q_m Element von R_1 ist.*

2. *Wenn M außerdem Primideal ist und $-R_1$ diejenige Restklasse des Restklassenringes E/M ist, für welche $R_1 + (-R_1) = 0$ ist, so ist $p \varepsilon -R_1$.*

3. *Wenn E ein Einselement e hat und $e \not\equiv -e(M)$ ist und ferner k^* die Anzahl aller zu je zweien inkongruenten Lösungen der Bestimmungskongruenz $x^2 \equiv e(M)$ bedeutet, so ist $p \equiv (-e)^{k^*/2}$ (M).*

Beweis. Der erste Teil folgt aus dem Satz 1, den Eigenschaften der Restklassenmultiplikation und dem eingangs erwähnten Satz über endliche Gruppen. Für den weiteren Beweis bestimmen wir die Zahl k aller

Repräsentanten $\bar{r}_1, \ldots \bar{r}_k$, deren Quadrate zur Einsrestklasse R_1 gehören. Da das Quadrat eines jeden zu R_1 gehörenden Elements wieder zu R_1 gehört, ist $k \geqslant 1$. Ist nun M Primideal, so hat nach der Erklärung des Begriffes Primideal der Restklassenring E/M keine echten Nullteiler. Aus $a \varepsilon R_1$ und $b^2 \varepsilon R_1$ folgt $a^2 \varepsilon R_1$ und $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \varepsilon M$ und daher ist entweder $a + b \varepsilon M$, also $b \varepsilon - R_1$, oder $a - b \varepsilon M$, also $b \varepsilon R_1$, oder es ist beides der Fall. Ist $-R_1 \neq R_1$, so hat daher die vorhin näher erklärte Zahl k für das Primideal M den Wert 2, ist dagegen $-R_1 = R_1$, so ist $k = 1$. Wegen $(-R_1) R_1 = -R_1$ gibt es daher in beiden Fällen nach dem eingangs erwähnten Satz über endliche Gruppen eine Anordnung der Repräsentanten, so daß $p \varepsilon - R_1$ ist.

Hat nun E ein Einselement e und ist $e \not\equiv -e(M)$, so gibt es ein Repräsentantensystem $r_1, \bar{r}_1, \ldots r_i, \bar{r}_i$ der Restklassen von $\mathfrak{R}$, welches mit jedem Element r_s auch $-r_s = \bar{r}_s$ enthält. Denn aus $r \varepsilon R \varepsilon \mathfrak{R}$ und $r \equiv -r(M)$ würde folgen, daß $r + r = r(e + e) \varepsilon M$ wäre. Da wegen $r \varepsilon R$ und $R \varepsilon \mathfrak{R}$ $(r, M) = E$ ist, müßte nach den Eigenschaften eines gewöhnlichen Ideals $((e + e), M) = (r(e + e), M) = M$, also $e + e \varepsilon M$ sein, was eben wegen $e \not\equiv -e(M)$ nicht möglich ist.

Wegen der Richtigkeit der Kongruenzrechnungen für zweiseitige Ideale ist die letzte Behauptung des Satzes 2 richtig, wenn sie für ein bestimmtes Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{R}$ gilt. Wir nehmen daher ein Repräsentantensystem $\bar{\varrho}$, welches mit jedem Element r auch $-r$ enthält. Aus $r \varepsilon \bar{\varrho}$ und $r^2 \equiv e(M)$ folgt dann, daß auch $-r \varepsilon \bar{\varrho}$ und $(-r)^2 \equiv e(M)$ ist und daher k gerade ist. Wir können daher die ersten k Faktoren unseres Produktes so anordnen, daß der erste Faktor r_1 ist und auf r_1 der Faktor $-r_1$ folgt, dann der Faktor r_2, dann $-r_2$ usw. folgt. In dem auf diese Weise angeordneten Produkt ist das Teil-Produkt der ersten k Faktoren desselben dem Wert $(-e)^{k/2}$ kongruent. Da nun aus $r^2 \equiv e(M)$ folgt, daß $(r, M) = E$ ist[2], ist $k = k^*$ und daher ergibt sich die Behauptung 3. aus dem eingangs erwähnten Satz über endliche Gruppen.

Zieht man weitere Sätze heran, insbesondere den Satz, wonach jeder Ring mit mindestens zwei und nur endlich vielen Elementen und ohne echte Nullteiler ein GALOIS-Feld ist, so erhält man noch folgenden

Zusatz. *Sind die Voraussetzungen des Satzes 2, Pkt. 2. erfüllt und hat außerdem der Restklassenring E/M nur endlich viele Elemente, so ist bei*

---

[2] Denn ist $(r, M) = T$ und $r^2 \equiv e(M)$, so ist $r^2 - e \varepsilon M \subseteq T$ und $r^2 \varepsilon T$, also ist auch $r^3 - (r^3 - e) = e \varepsilon T$ und daher ist $T = E$.

jeder Anordnung der Repräsentanten $r_1, r_2, \ldots r_n$, *deren Produkt ein Element von* $-R_1$.

Aus M ist Primideal in E und $\mathfrak{R}$ ist endlich, kann i. a. nicht gefolgert werden, daß E/M endlich ist. Ein einfaches Beispiel bietet bereits der Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen G und das Primideal (0) in G. Im Zusatz dürfte daher die Bedingung, daß E/M endlich ist, nicht ohne weiteres weggelassen werden können.

Wir wollen nun noch durch ein einfaches Beispiel zeigen, daß die Bedingung $e \not\equiv -e(M)$ im Satz 2, Pkt. 3 nicht ohne eine geeignete Ersatzbedingung weggelassen werden kann. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Polynomring $P_2(x)$ aller Polynome in einer Unbestimmten x über dem Primkörper der Charakteristik 2 und das Ideal (x^2) in $P_2(x)$. Dann besteht $\mathfrak{R}$ für das Ideal $M = (x^2)$ in $P_2(x)$ nur aus den Restklassen mit den Repräsentanten e und $x + e$, wobei e das Einselement des Grundkörpers ist. p ist hier gleich $x + e$ und $x + e$ ist inkongruent $-e$ modulo x^2.

Man kann nun den Satz 2 für den Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen und für die Polynomringe spezialisieren. Man erhält auf diese Weise zunächst die eingangs erwähnte Verallgemeinerung des Wilsonschen Satzes für ganze rationale Zahlen. Ein Spezialfall dieses Satzes ist der

Satz 3. *Ist die natürliche Zahl* m *das Produkt der beiden Zahlen eines Primzahlzwillings und ist* $p = [\sqrt{m}]$, *so ist*

$$\frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(p+1)!\,p^2\,m^{p-1}} \equiv 1\ (m).$$

Denn man zeigt leicht, daß wenn $m = p(p+2)$ ist, $p = [\sqrt{m}]$ ist und wenn p und $p + 2$ Primzahlen sind, daß das Produkt aller zu m teilerfremden positiven Reste $< m$ nach m gleich der linken Seite der obigen Kongruenz ist. Ferner zeigt man leicht, daß $x^2 \equiv 1(p(p+2))$, wenn p und $p + 2$ Primzahlen sind, genau vier mod. m inkongruente Lösungen hat.

Umgekehrt kann man vermuten, daß für $m > 3$, diese Bedingung hinreicht, damit die natürliche Zahl m das Produkt der beiden Zahlen eines Primzahlzwillings ist.

Entsprechende Sätze kann man, wenn p und q Primzahlen sind, für $m = p^2, = p^n, . = pq$ gewinnen. Auch allgemeinere Sätze dieser Art kann man auf diese Weise gewinnen. Dabei ergeben sich eine Reihe

von Umkehrproblemen aus diesen Sätzen, die, wie es mir scheint, nicht ganz einfach zu erledigen sind.

Wenden wir nun den Satz 2 auf den Polynomring $P_q(x)$ über dem GALOIS-Feld G_q mit q Elementen und das Ideal (x) in $P_q(x)$ an, so ergibt sich nach Pkt. 2 dieses Satzes, der bekannte Satz, daß in jedem GALOIS-Feld das Produkt aller von Null verschiedenen Elemente desselben den Wert $-e$ hat, wobei e das Einselement des Feldes G_q ist.

Wir können außerdem noch einen sehr merkwürdigen Satz über das Produkt der unzerlegbaren quadratischen Polynome eines jeden $P_q(x)$ gewinnen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von den nicht konstanten linearen Polynomen in $P_q(x)$ aus. Die Anzahl all dieser Polynome ist $q^2 - q$. Der Grad des Produktes aller von Null verschiedenen Polynome g höchstens ersten Grades aus $P_q(x)$ ist daher $q^2 - q$. Für jedes in $P_q(x)$ unzerlegbare quadratische Polynom j ist die Menge aller g ein Repräsentantensystem der zu j teilerfremden Restklassen in $P_q(x)$. Nach Satz 2, Pkt. 2 ist daher, wenn wieder e das Einselement von G_q und Q das Produkt aller g ist, $Q + e$ durch j teilbar. Daher ist auch $Q + e$ durch das Produkt Z aller zu je zweien teilerfremden unzerlegbaren quadratischen Polynome aus $P_q(x)$ teilbar. Ist a die Anzahl dieser quadratischen Polynome, so muß daher $a \leqslant \frac{1}{2}q(q-1)$ sein. Bestimmt man nun anderseits a mit Hilfe der Kombinatorik, so findet man leicht, daß $a = \frac{1}{2}q(q-1)$ ist. Daher ist der Grad von Z gleich $q(q-1)$. Da $Q + e$ durch Z teilbar ist und $Q + e$, wie bereits festgestellt wurde, den Grad $q(q-1)$ hat, gibt es daher ein Element $v \varepsilon G_q$, so daß $vZ = Q + e$ ist. Um v zu bestimmen, wählen wir e als Beiwert des quadratischen Gliedes der Polynome j. Anderseits haben für jedes von Null verschiedene $b \varepsilon G_q$ q Faktoren g b als Beiwert des linearen Gliedes und da nach dem vorhin erwähnten Satze das Produkt aller b den Wert $-e$ hat, ist daher der Beiwert des höchsten Gliedes von $Q + e$ gleich $(-e)^{q+1}$. Da stets $q = p^a$ ist, wobei p eine natürliche Primzahl ist, und für $p = 2$ in G_q $e = -e$ ist, ist daher $v = e$. Wir haben daher folgenden merkwürdigen Satz gefunden:

Satz 4. *Ist G_q ein GALOIS-Feld mit q Elementen, e sein Einselement und P das Produkt aller von Null verschiedenen Polynome höchstens ersten (n-ten) Grades in einer Unbestimmten x über G_q, ist ferner Z das Produkt aller unzerlegbaren quadratischen Polynome ($(n+1)$-ten Grades)*

in x über G_q, deren höchster Beiwert e ist, so ist $Z = P + e$ (Z Teiler von $P + e$)[3].

Für die unzerlegbaren Polynome dritten Grades gilt ein entsprechender Satz nicht, was man ganz ähnlich zeigt.

Wir hatten für den Beweis des Satzes 1 benötigt, daß M ein gewöhnliches Ideal ist. Man kann nun für den Fall, daß der Ring E ein Einselement e enthält, auch so vorgehen, daß man diejenigen Restklassen nach dem zweiseitigen Ideal M auszeichnet, deren Elemente zerlegungsfremd zu M sind. Dabei heiße $a \varepsilon E$ zerlegungsfremd zu M, wenn es eine Zerlegung von a in endlich viele Faktoren aus E: $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ und $n + 1$ weitere Elemente $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}$ aus M und ferner ein m aus M derart gibt, daß $\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \ldots a_n \alpha_n \alpha_{n+1} + m = e$ ist. Mit Hilfe dieser zu M zerlegungsfremden Elemente und Restklassen kann man einen, dem Satz 2 ähnlichen Satz beweisen.

[3] Mit Hilfe der Eigenschaft, daß die multiplikative Gruppe in G_q zyklisch ist, zeigt man im Falle $n = 1$ leicht, daß $P = (x^2 - x)^{q-1}$ ist. Der Satz 4 kann auf ziemlich ähnliche Weise auch mit Hilfe des Satzes bewiesen werden, nach welchem der Restklassenring nach einem unzerlegbaren Polynom aus $P_q(x)$ ein GALOIS-Feld ist.

Die Abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale erfüllen

Von

F. Szász, Budapest

(Eingegangen am 25. Mai 1960)

Die folgende allgemeine Frage scheint bemerkenswert: Es sind alle Abelschen Gruppen G zu bestimmen, deren (voller) Endomorphismenring eine festgewählte Eigenschaft E besitzt. In dieser Note werden wir ein spezielles Problem von derselben Art erörtern.

Bekanntlich hat Professor *L. Fuchs* in seinem Buch [2] alle Abelschen Gruppen bestimmt, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Linksideale erfüllen. Schreibt man die Endomorphismen der Gruppe immer als rechtsseitige Operatoren, so sieht man, daß zwei verschiedene Probleme entstehen, wenn man die Minimalbedingung erstens für Linksideale, zweitens für Rechtsideale fordert.

Der Zweck der vorliegenden Note ist nun, zu zeigen, daß man stets dieselbe Klasse von Abelschen Gruppen als Lösung der Frage erhält, wenn man die Minimalbedingung erstens für die Linksideale, zweitens für die Hauptlinksideale, drittens für die Rechtsideale, viertens für die Hauptrechtsideale voraussetzt. Aus unserem Satz folgt ferner, daß nur die endlichen Abelschen Gruppen endliche volle Endomorphismenringe haben. Wir werden auch eine notwendige Bedingung dafür herleiten, daß im vollen Endomorphismenring von G die Minimalbedingung für die (zweiseitigen) Hauptideale gelte.

Bezüglich der Grundbegriffe verweisen wir auf das Buch [2]. Weiter haben wir eine Theorie der *MHR*-Ringe (d. h. Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale) in unserer Kandidatsdissertation [3] entwickelt. Für die Publikation des Stoffes der Dissertation verweisen wir auf [4] bzw. [5], [1] und [6]. Inzwischen erschien nämlich auch eine Note von *C. C. Faith* über ähnliche ringtheoretische Fragen.

Es gilt nun der

Satz. *Es sei G eine beliebige Abelsche Gruppe und A der volle Endomorphismenring (als ein rechtsseitiger Operatorenbereich) von G. Dann sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:*

1. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale;*

2. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale;*

3. *G ist die direkte Summe einer endlichen Abelschen Gruppe und endlich vieler Exemplare $\mathfrak{R}$ der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen;*

4. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Rechtsideale;*

5. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Linksideale.*

Ergänzung. *Gilt in A die Minimalbedingung für die zweiseitigen Hauptideale, so ist G notwendig die direkte Summe einer Abelschen Gruppe von beschränkten Ordnungen der Elemente und von Exemplaren $\mathfrak{R}$ der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen. Ist insbesondere A endlich, so ist G ebenfalls endlich.*

Nun werden wir zwei elementare Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. Es sei $\eta, \vartheta \in A$, $\eta = m\chi (\chi \in A)$ und $n\vartheta = 0$ $(1 \leqslant m, n \in J$; J ist der Ring der ganzen rationalen Zahlen). Dann bestehen $G\eta \subseteq mG$ und $n(G\vartheta) = 0$.

Beweis. Es gilt $G\eta = G(m\chi) = m(G\chi) \subseteq mG$. Ferner ist $n(G\vartheta) = = G(n\vartheta) = G0 = 0$.

Hilfssatz 2. Es sei G die direkte Summe abzählbar unendlich vieler Untergruppen $G_i \neq 0$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$. Dann gilt im vollen Endomorphismenring A der Abelschen Gruppe G die Minimalbedingung weder für die Hauptrechtsideale, noch für die Hauptlinksideale.

Beweis. Die Untergruppen $S_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} + G_j$ bilden eine unendliche absteigende Kette der direkten Summanden von G. Es sei π_n die Projektion (d. h. ein idempotenter Endomorphismus) von G auf S_n (denn es gilt $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n \oplus S_n$ für jeden Index n). Nun bestehen $\pi_n \pi_{n-1} = \pi_n$ und $\pi_{n-1}\pi_n = \pi$ wegen $S_n \subset S_{n-1}$. Also erhält man für die Hauptlinksideale $(\pi_n)_l$ von A eine Beziehung $(\pi_{n-1})_l \supseteq (\pi_n)_l$ und für die entsprechenden Hauptrechtsideale die Relation $(\pi_{n-1})_r \supseteq (\pi_n)_r$. Wir zeigen nun, daß das Umfassen echt ist. Da der Ring A ein zweiseitiges Einselement ε besitzt, genügt es, die Unlösbarkeit sowohl einer Gleichung $\eta_n \pi_n = \pi_{n-1} (\eta_n \in A)$ als einer Gleichung $\pi_n \vartheta_n = \pi_{n-1}$ $(\vartheta_n \in A)$

nachzuweisen. Dies folgt aber wegen $S_{n-1} = G_n \oplus S_n$ aus den folgenderweise entstehenden Widersprüchen: $G_n = G_n \pi_{n-1} = G_n(\eta_n \pi_n) = (G_n \eta_n)\pi_n \subseteq G\pi_n = S_n$, $G_n \subseteq S_n \cap G_n$, $G_n = 0$ bzw. $G_n = G_n \pi_{n-1} = (\pi_n \vartheta_n) = (G_n \pi_n)\vartheta_n = 0\,\vartheta_n$, $G_n = 0$, denn es gilt $G_n \neq 0$. Hiernach bestehen $(\pi_{n-1})_l \supset (\pi_n)_l$ und $(\pi_{n-1})_r \supset (\pi_n)_l$ für jeden Index n, w.z.b.w.

Der Beweis des Satzes besitzt das folgende logische Schema bezüglich des Verhältnisses der Bedingungen, die im Satz erwähnt wurden:

Aus 1) folgt 3). Nehmen wir an, daß die Bedingung 1) erfüllt ist. Es sei ferner ε das Einselement (= der identische Automorphismus von G) aus A, und $(m\,\varepsilon)_r$ ein minimales Hauptrechtsideal von A in der Menge aller Hauptrechtsideale der Gestalt $(n\,\varepsilon)_r = n\,A (m, n \in J)$. Dann gilt $m\,A = k\,m\,A$ für jede natürliche Zahl k, folglich besteht auch $m\,\varepsilon = k\,m\,\chi_k\,(\chi_k \in A;\ 1 \leqslant k \in J)$. Nach dem Hilfssatz 1. erhält man $m\,G = G(m\,\varepsilon) \subseteq k\,m\,G \subseteq m\,G$ d. h. $m\,G = k\,m\,G$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Die vollständige Abelsche Gruppe $m\,G$ ist also ein direkter Summand in G. Folglich gibt es eine Untergruppe H von G mit $G = m\,G \oplus H$, die wegen $H \cong G/m\,G$ beschränkt ist, d. h. $m\,H = 0$. Da ein Endomorphismus χ_p mit $m\,\varepsilon = p\,m\,\chi_p$ in einer Untergruppe $Z(p^\infty)$ von G keine eindeutige Abbildung wäre, so existiert in G keine $Z(p^\infty)$, und es gilt

$$G = \sum_{\nu} \oplus \mathfrak{R}_{(\nu)} \oplus \sum_{p_\nu^{k_\nu}/m} \oplus Z(p_\nu^{k_\nu})$$

denn jede beschränkte Gruppe läßt sich in die direkte Summe von zyklischen Gruppen zerlegen. Nach dem Hilfssatz 2. besitzt aber $\sum_{\nu} \oplus \mathfrak{R}_{(\nu)}$ einen endlichen Rang n_0 und auch die Untergruppe $\sum_{p_\nu^{k_\nu}/m} \oplus Z(p_\nu^{k_\nu})$ ist endlich.

Aus 2) folgt 3). Der Beweis ist dem von „aus 1) folgt 3" ähnlich.

Aus 3) folgt 4). Im Falle der Bedingung 3) ist der volle Endomorphismenring A_1 von $\sum_{\nu} \oplus \mathfrak{R}_{(\nu)}$ ein voller Matrizenring des Typs $n_0\,\chi\,n_0$ über dem rationalen Zahlkörper K_0, und der volle Endomorphismenring A_2 von $\sum_{p_\nu^{k_\nu}/m} \oplus Z(p_\nu^{k_\nu})$ ist endlich. In diesen zwei Ringen gilt offenbar die Minimalbedingung für (alle) Rechtsideale. Da die Gruppe $\mathfrak{R}$ keine echte Untergruppe mit endlich vielen Nebenklassen in $\mathfrak{R}$ besitzt, ist jeder Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ in eine endliche Abelsche Gruppe der Nullhomomorphismus. Ferner ist jeder Homomorphismus einer endlichen Gruppe in $\sum_{\nu} \oplus \mathfrak{R}_{(\nu)}$ der Nullhomomorphismus, denn $\sum_{\nu} \oplus \mathfrak{R}_{(\nu)}$ ist torsions-

frei. Folglich gilt im Ring A, der hiernach die ringtheoretische direkte Summe der obigen Ringe A_1 und A_2 ist, die Minimalbedingung für (alle) Rechtsideale.

Aus 3) folgt 5). Der Beweis ist dem von „aus 3) folgt 4)" ganz ähnlich.

Aus 4) folgt 1). Dies ist klar.

Aus 5) folgt 2). Dies ist ebenfalls trivial.

Somit ist der Satz bewiesen.

Die erste Behauptung der Ergänzung folgt aus der Untersuchung der Hauptideale $(n\,\varepsilon) = A(n\,\varepsilon)\,A = n\,A$ von A mit Hilfe ähnlicher Methoden wie beim Beweis der Aussage „aus 1) folgt 3)". Ist nun A insbesondere endlich, so ist G ebenfalls endlich wegen des Satzes, denn A besitzt keinen unendlichen Unterring $A_1 \cong (K_0)_{n_0}$, der der Endomorphismenring von $\Sigma\,\mathfrak{R}$ ist, und hiernach enthält G tatsächlich keine Untergruppe $\mathfrak{R}$.

Literatur

[1] *C. C. Faith*, Rings with minimum condition on principal ideals, Archiv der Math., 10: 5 (1959) 327—330.

[2] *L. Fuchs*, Abelian groups, Publishing House Hung. Acad. Sci. Budapest (1958).

[3] *Szász F.*, A főjobbideálokra nézve minimum-feltételü gyürük (kandidátusi disszertáció), Budapest (1959).

[4] *F. Szász*, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I., Publ. Math. Debrecen 7. (Im Erscheinen.)

[5] *F. Szász*, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale II., Acta Math. Acad. Sci. Hung. (Im Erscheinen.)

[6] *Szász F.*, Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, M. T. A. III. Oszt. Közl. 10 (1960) 35—38.

Zur Lagerung kongruenter Körper im Raum

Von

Wolfgang Schmidt, Wien

(Eingegangen am 20. Juni 1960)

1.

Professor *Hlawka* bemerkte kürzlich, daß die Dichte einer Lagerung kongruenter Kreistori T im Raum anscheinend unter einer festen Zahl $\partial(T) < 1$ liegen müsse, daß aber ein Beweis hiefür nicht vorliege. Wir geben im folgenden einen Beweis, der nicht nur für den Torus gilt, sondern für alle Körper mit hinreichend glattem Rand. Außerdem behandeln wir das Überdeckungsproblem.

Alle von uns verwendeten Punktmengen $M, N, \ldots$, sind quadrierbare, beschränkte Mengen des R^m. Unter $M - N$ verstehen wir die Menge der Punkte aus M, die nicht in N liegen, unter $V(M)$ das Volumen von M, unter der Entfernung von M und N die Zahl

$$d(M, N) = V(M - N) + V(N - M).$$

Mit dieser Entfernung, welche das Symmetrieaxiom und das Dreiecksaxiom, nicht aber das Identitätsaxiom erfüllt, wird der Raum der quadrierbaren Mengen zu einem allgemein-metrischen Raum. Konvergenz und Kompaktheit sind definierbar. Der Grenzwert einer konvergenten Mengenfolge ist nicht eindeutig: Ist M Grenzwert und $d(M, N) = 0$, so ist auch N Grenzwert.

Gegeben sei nun eine Klasse σ von Mengen mit den Eigenschaften

i) σ ist kompakt,

ii) Es gibt $0 < r_1 < r_2 < \infty$, so daß $V(M) \geqq r_1$ für $M \in \sigma$, und daß jedes $M \in \sigma$ in $W(r_2)$ enthalten ist. Dabei ist $W(r)$ der Würfel $|x_i| \leqq \leqq r$ $(i = 1, \ldots, m)$ im R^m.

Unter einem σ-System Σ verstehen wir ein System von Mengen, die aus Mengen von σ durch Translationen hervorgehen. Wir sagen, Σ überdeckt die Menge W, wenn jeder Punkt von W der abgeschlossenen

Hülle mindestens einer der Mengen von Σ angehört. Ein σ-System heiße *Lagerung*, falls die offenen Kerne der Mengen des Systems paarweise disjunkt sind, es heiße *Überdeckung*, wenn Σ den R^m überdeckt.

$(2r)^m \mu(r, M)$ bedeute das Volumen des Durchschnittes der Menge M mit $W(r)$. Wir bilden

$$\mu(r, \Sigma) = \sum_{M \in \Sigma} \mu(r, M).$$

$\overline{\mu}(\Sigma)$ und $\underline{\mu}(\Sigma)$ seien der obere und untere Limes von $\mu(r, \Sigma)$ bei unbeschränkt wachsendem r. Unter der *Lagerungsdichte* von σ verstehen wir

$$\partial(\sigma) = \sup \underline{\mu}(\Sigma),$$

wobei das Supremum über alle σ-Lagerungen Σ zu bilden ist; analog sei

$$\Delta(\sigma) = \inf \overline{\mu}(\Sigma)$$

über alle σ-Überdeckungen. Offenbar haben wir

$$\partial(\sigma) \leqq 1 \leqq \Delta(\sigma).$$

Mit $K(x, \varrho)$ bezeichnen wir die Kugel mit Mittelpunkt x, Radius ϱ. Ist x Randpunkt von M, so sei

$$\omega_M(x, \varrho) = V(M \cap K(x, \varrho)) \,/\, V(K(x, \varrho)).$$

Endlich schreiben wir

$$\omega_M(x) = \lim_{\varrho \to 0} \omega(x, \varrho),$$

so daß $0 \leqq \omega(x) \leqq 1$. In dieser Note beweisen wir den

Satz. *Die Mengenklasse σ habe Eigenschaften* i) *und* ii). *Dann hat entweder eine der Mengen M von σ einen Randpunkt x mit*

$$\omega_M(x) \leqslant (m+1)^{-1},$$

oder

$$\partial(\sigma) < 1 < \Delta(\sigma).$$

Da die Klasse der Mengen, die aus einer quadrierbaren Menge mit positivem Inhalt durch Rotation hervorgehen, die verlangten Eigenschaften besitzt, und da beim Torus stets $\omega(x) = \frac{1}{2}$ ist, ist damit das anfangs genannte Problem gelöst.

2.

Hilfssatz 1. *Gegeben sei eine Folge von Systemen Σ_n von k Mengen:*

$$\Sigma_n(M_{n1}, M_{n2}, \ldots, M_{nk});$$

sie sei konvergent gegen

$$\Sigma(M_1, M_2, \ldots, M_k),$$

das heißt $\lim_{n\to\infty} M_{ni} = M_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Behauptung: A. *Sind die* Σ_n *Lagerungen, dann ist auch* Σ *Lagerung.* B. *Überdecken die* Σ_n *den Würfel* $W(r)$, *so überdeckt auch* Σ *diesen Würfel.*

Beweis. A. Wir haben $d(M_{ni}, M_{nj}) = V(M_{ni}) + V(M_{nj})$ $(i \neq j)$. Da $V(M)$ und $d(M, N)$ stetig sind, erhalten wir $d(M_i, M_j) = V(M_i) + V(M_j)$, daher sind die offenen Kerne von M_i, M_j punktfremd und Σ ist eine Lagerung.

B. Angenommen, Σ würde $W(r)$ nicht überdecken. Dann gäbe es eine Kugel $K \subset W(r)$, die mit den Hüllen der Mengen von Σ keinen Punkt gemeinsam hätte. Also wäre

$$\sum_{i=1}^{k} V(K \cap M_i) = 0.$$

Andererseits war

$$\sum_{i=1}^{k} V(K \cap M_{ni}) \geqq V(K),$$

so daß wir wegen der Stetigkeit des Volumens einen Widerspruch erhalten.

Hilfssatz 2. *Gegeben sei eine* i) *und* ii) *befriedigende Klasse* σ *von Mengen. Dann erfüllt die Klasse* σ' *aller Mengen, die aus Mengen von* σ *durch Translationen hervorgehen, und die in einem Würfel* $W(r)$ *liegen, wieder* i) *und* ii).

Beweis. Wir müssen nur i) zeigen. Eine Folge τ_n von Translationen heiße konvergent, wenn die zugehörigen Translationsvektoren konvergieren. Zu jeder Folge von Mengen aus σ' gibt es eine Teilfolge $\tau_n M_n$, wobei $\tau_n \to \tau$ und $M_n \to M$ konvergent sind. Es bleibt zu zeigen, daß $\tau_n M_n$ im Sinne unserer Definition gegen τM strebt. Wir haben

$$\begin{aligned} &d(\tau_n M_n, \tau M) \\ &\leqq V(\tau_n M_n - \tau_n M) + V(\tau_n M - \tau M) + V(\tau M - \tau_n M) + V(\tau_n M - \tau_n M_n) \\ &= d(M_n, M) + 2\, V(\tau M - \tau_n M). \end{aligned}$$

Für quadrierbares M strebt aber $V(\tau M - \tau_n M) \to 0$ bei wachsendem n.

Hilfssatz 3. A. Die Klasse σ erfülle i), ii). Dann ist $\partial(\sigma) = 1$ genau dann, wenn es zu jedem r eine σ-*Lagerung* Σ *gibt mit*

$$\mu(r, \Sigma) = 1.$$

B. *Erfüllt* σ i), ii), *dann ist* $\Delta(\sigma) = 1$ *genau dann, wenn es zu jedem* r *eine* σ*-Überdeckung von* $W(r)$ *gibt, so daß* $\mu(r, \Sigma) = 1$.

Beweis. A. Gibt es eine σ-Lagerung Σ, für die $\mu(r, \Sigma) = 1$, dann gibt es offenbar eine Lagerung, die ganz im Würfel $W(r + r_2)$ enthalten ist, und in diesem eine Dichte

$$\geqq r^m/(r + r_2)^m$$

besitzt. Da man achsenparallele Würfel der Seitenlänge $2(r + r_2)$ im Raum lückenlos lagern kann, ist $\partial(\sigma) \geqq r^m/(r + r_2)^m$. Gibt es zu jedem r eine Lagerung Σ mit $\mu(r, \Sigma) = 1$, dann ist $\partial(\sigma) = 1$.

Nehmen wir umgekehrt an, es gibt ein r, so daß $\mu(r, \Sigma) < 1$ für jede σ-Lagerung. Es genügt zu zeigen, es gibt keine Folge von Lagerungen Σ_n, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \mu(r, \Sigma_n) = 1.$$

Denn dann ist $\mu(r, \Sigma_n) \leqq \eta < 1$ und $\partial(\sigma) \leqq \eta$.

Angenommen, Σ_n wäre eine solche Folge. Die Mengen von Σ_n dürfen als in $W(r + r_2)$ liegend vorausgesetzt werden. Daher gehören alle Mengen der Σ_n zur Klasse σ' der Mengen, die aus Mengen von σ durch Translationen hervorgehen und in $W(r + r_2)$ liegen. In Σ_n liegen höchstens $c(r + r_2, r_1)$ Mengen; wir dürfen voraussetzen, alle Σ_n bestehen aus gleich vielen, etwa k, Mengen. Wegen der Kompaktheit von σ' dürfen wir annehmen, die Folge Σ_n strebe gegen Σ im Sinne von Hilfssatz 1. Dann ist Σ eine σ-Lagerung mit $\mu(r, \Sigma) = 1$, womit ein Widerspruch erreicht ist.

B. Sei Σ eine σ-Überdeckung des Würfels $W(r)$ mit $\mu(r, \Sigma) = 1$. Wir greifen aus Σ alle Mengen heraus, die in $W(r)$ liegen, und erhalten so eine Überdeckung Σ' von $W(r - r_2)$ mit $\mu(r - r_2, \Sigma') = 1$. Da man den R^m durch nicht überlappende Würfel der Seitenlänge $2(r - r_2)$ überdecken kann, erhalten wir $\Delta(\sigma) \leqq r^m/(r - r_2)^m$, woraus der eine Teil der Behauptung B folgt.

Gibt es ein r, so daß $\mu(r, \Sigma) > 1$ für alle σ-Überdeckungen, dann gilt dies sogar für alle $r > r_0$. Wir zeigen, es gibt für $r > r_0 + r_2$ keine Überdeckungsfolge Σ_n mit

$$\lim_{n \to \infty} \mu(r, \Sigma_n) = 1.$$

Wäre Σ_n eine solche Folge, so wei Σ_n' das System derjenigen Mengen aus Σ_n, die in $W(r)$ enthalten sind. Wir dürfen und wollen annehmen, alle Σ_n' bestehen aus etwa k Mengen, sowie Σ_n' sei konvergent gegen Σ'.

Offenbar ist Σ' eine σ-Überdeckung von $W(r - r_2)$ mit $\mu(r - r_2, \Sigma') = 1$, was wegen $r - r_2 > r_0$ einen Widerspruch darstellt.

3.

Beweis des Satzes. Sei Σ σ-Lagerung mit $\mu(r, \Sigma) = 1$. Dann ist Σ zugleich Überdeckung von $W(r)$. Nach dem Lebesgueschen Pflastersatz[1] ist die Ordnung der Überdeckung von $W(r)$ durch abgeschlossene Hüllen von Mengen aus Σ bei genügend großem r mindestens gleich $m + 1$, und es gibt daher ein $M \in \sigma$ mit einem Randpunkt x, so daß $\omega_M(x) \leqq (m + 1)^{-1}$. Wegen Hilfssatz 3 folgt daraus der eine Teil des Satzes.

Die Behauptung über Überdeckungen folgt ähnlich.

[1] Siehe etwa *Alexandroff-Hopf*, Topologie, Grundlehren 45, Seite 263. Haben die Mengen aus σ zusammenhängenden Rand, so sieht man leicht, daß die Ordnung mindestens 3 wird. Wäre sie nämlich nur 2, bei beliebig großem r, dann gäbe es 2 beschränkte Mengen M, N mit gemeinsamen Rand, so daß $M \cup N$ randlos.

Majorization of Vectors and Inequalities for Convex Functions

By

L. Mirsky, Sheffield

(Received June 25, 1960)

1. Introduction

Let x_i, y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ be given real numbers. A well-known theorem, proved by *Hardy*, *Littlewood*, and *Pólya* [5, Theorem 8] and rediscovered by *Karamata* [8], is concerned with necessary and sufficient conditions for the inequality

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) \tag{1.1}$$

to be valid for all convex functions Φ. Various extensions and analogues of this problem are to be found in the literature. Thus *Weyl* [17] and *Pólya* [15] considered the class of convex increasing functions, *Ostrowski* [14] the class of functions of several variables which are 'Schur-convex', and *Ky Fan* [3, Theorem 4] and myself [12] the class of symmetric gauge functions. More recently, I generalized a number of earlier results by investigating convex functions of a vector variable [11]. In the present note I propose to return to the case of functions of a scalar variable and to examine, instead of (1.1), the more general inequality

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i), \tag{1.2}$$

where $1 \leqslant r \leqslant n$. The object of the investigations is to determine what conditions have to be satisfied by the x_i and y_i in order that (1.2) should be valid for every function Φ belonging to certain specified classes of functions. The main tools used in the argument are a 'majorization' theorem proved very recently by *Chandler Davis* (Theorem 1 below) and known results on doubly-stochastic and doubly-substochastic matrices.

2. Notation

All numbers are assumed to be real and all vectors are of row type. $\mathfrak{V}_n$ denotes the space of all vectors with n components.

If $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ and $1 \leqslant k \leqslant n$, then $M_k(\mathbf{x})$ and $m_k(\mathbf{x})$ denote respectively the maximum and minimum of

$$x_{i_1} + \ldots + x_{i_k},$$

where $i_1, \ldots, i_k$ range over all sets of integers such that

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

It is also convenient to write $M_0(\mathbf{x}) = m_0(\mathbf{x}) = 0$. We see at once that

$$M_k(\mathbf{x}) = -m_k(-\mathbf{x}).$$

If $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}_n$ and

$$M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{y}) \tag{2.1}$$

for $1 \leqslant k \leqslant n$, we shall write $\mathbf{x} \prec\prec \mathbf{y}$. If, *in addition*, there is equality in (2.1) for $k = n$, we shall write $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. In the terminology of *Hardy, Littlewood*, and *Pólya* [6, p. 45], the vector $\mathbf{x}$ is then said to be *majorized* by $\mathbf{y}$.

Suppose that $1 \leqslant r \leqslant n$ and $\mathbf{x} \in \mathfrak{V}_n$. Then $[\mathbf{x}]_r$ denotes the vector in $\mathfrak{V}_r$ which is obtained if the last $n-r$ components in $\mathbf{x}$ are deleted. For $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}_n$, we denote by $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ the inner product of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$.

We put $a^+ = \max(a, 0)$. If $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, then $\mathbf{x}^+$ denotes the vector $(x_1^+, \ldots, x_n^+)$.

$\mathfrak{S}_n$ denotes the set of the $n!$ permutations of $1, \ldots, n$. If $\mathbf{x} \in \mathfrak{V}_n$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, then $\mathbf{x}_\pi$ is the vector obtained when the components of $\mathbf{x}$ are subjected to the permutation π.

A square matrix is said to be *doubly-stochastic* (*doubly-substochastic*) if its elements are non-negative and if the sum of the elements in each row and each column is equal (at most equal) to 1. We denote by $\mathfrak{D}_n(\mathfrak{E}_n)$ the set of all doubly-stochastic (doubly-substochastic) $n \times n$ matrices.

Inequalities between vectors (matrices) are interpreted component-wise (element-wise).

A function Φ is said to be convex in the interval I if

$$\Phi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \leqslant \lambda_1 \Phi(u_1) + \lambda_2 \Phi(u_2)$$

whenever $u_1, u_2 \in I$ and $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$. It follows that

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(u_i)$$

whenever $u_1, \ldots, u_n \in I$ and the λ_i are non-negative numbers with sum 1. The definition also implies that a convex function is continuous in I.

3. Preliminary results

In this section we collect a number of known results which will be needed in the subsequent discussion.

LEMMA 1. *If* $\mathbf{E} \in \mathfrak{E}_n$, *then there exists a matrix* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ *such that* $\mathbf{E} \leqslant \mathbf{D}$.

This result was noted by *von Neumann* [13, Lemma 1]; see also [10, Lemma 3]. *Von Neumann*'s argument runs essentially as follows: increase, in turn, each element of $\mathbf{E}$ as much as possible, consistent with the requirement that each new matrix should still belong to $\mathfrak{E}_n$; then the matrix $\mathbf{D}$ finally obtained has the necessary properties.

LEMMA 2. *Let* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}_n$. *Then there exists a matrix* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ *such that* $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}\,\mathbf{D}$ *if and only if* $\mathbf{x} \prec\prec \mathbf{y}$.

This is Theorem 4 in [10].

LEMMA 3. *Let* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}_n$. *Then there exists a matrix* $\mathbf{E} \in \mathfrak{E}_n$ *such that* $\mathbf{x} = \mathbf{y}\,\mathbf{E}$ *if and only if* $\mathbf{x} \prec\prec \mathbf{y}^+$, $-\mathbf{x} \prec\prec (-\mathbf{y})^+$.

This is part of Theorem 6 in [10].

LEMMA 4. *For* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}_n$ *the following statements are equivalent.* (i) $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$; (ii) *there exists a matrix* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ *such that* $\mathbf{x} = \mathbf{y}\,\mathbf{D}$; (iii) $\mathbf{x}$ *lies in the convex hull of the vectors* $\mathbf{y}_\pi \in \mathfrak{S}_n$.

The equivalence of (i) and (ii) is due to *Hardy, Littlewood*, and *Pólya* [6, Theorem 46] while the equivalence of these statements to (iii) was established by *Rado* [16, § 1]. See also [4, p. 63] and [9].

LEMMA 5. *Let* $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathfrak{V}_n$. *Then* $\mathbf{x}$ *lies in the convex hull of* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ *if and only if, for all* $\mathbf{u} \in \mathfrak{V}_n$,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leqslant \max_{1 \leq i \leq k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{u}).$$

For a proof of this well-known result see e.g. the book by *Bonnesen* and *Fenchel* [1, pp. 23—24].

4. Convex functions

Davis's theorem [2, Theorem 7.2] referred to in the introduction may be stated in this form:

THEOREM 1. *Let* $1 \leqslant r \leqslant n$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{V}_r$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{V}_n$. *Then the following statements are equivalent.*

(i) *There exists a vector* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{V}_n$ *such that* $\mathbf{x} = [\mathbf{x}']_r$ *and* $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

(ii) *We have*

$$m_k(\mathbf{y}) \leqslant m_k(\mathbf{x}),\ M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{y}) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r). \tag{4.1}$$

(iii) *There exists a matrix* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ *such that* $\mathbf{x} = [\mathbf{y}\ \mathbf{D}]_r$.

For $r = n$, this result reduces to the equivalence of (i) and (ii) in Lemma 4. Davis's proof is based on an idea of *Rado*'s and proceeds by induction with respect to r. I give here an alternative proof which makes use of the simple property of convex hulls stated in Lemma 5.

First, let (i) be given. Then clearly

$$m_k(\mathbf{y}) \leqslant m_k(\mathbf{x}'),\ M_k(\mathbf{x}') \leqslant M_k(\mathbf{y}) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

But

$$m_k(\mathbf{x}') \leqslant m_k(\mathbf{x}),\ M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{x}') \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

and (ii) follows.

Next, let (ii) be given; we shall then deduce that (iii) is valid. Let $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)$ be any vector in $\mathfrak{V}_r$ and denote by $v_1, \ldots, v_r$ the numbers $u_1, \ldots, u_r$ arranged in non-ascending order of magnitude; also let $v_{r+1} = 0$. Put

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_r),\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r),\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

There is no loss of generality in assuming that

$$x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_r,\ y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n. \tag{4.2}$$

Then, by (4.1),

$$x_1 + \ldots + x_k \leqslant y_1 + \ldots + y_k, \tag{4.3}$$

$$x_{r-k+1} + \ldots + x_r \geqslant y_{n-k+1} + \ldots + y_n \tag{4.4}$$

for $1 \leqslant k \leqslant r$. Let

$$w_k = -(-v_k)^+ \quad (1 \leqslant k \leqslant r),\ \ w_0 = 0.$$

Multiplying (4.3) by the non-negative number $v_k^+ - v_{k+1}^+$, (4.4) by the non-positive number $w_{r-k+1} - w_{r-k}$, and adding the resulting $2r$ inequalities, we obtain

$$\sum_{k=1}^{r} (v_k^+ + w_k)\, x_k \leqslant \sum_{k=1}^{r} v_k^+\, y_k + \sum_{k=1}^{r} w_k\, y_{n-r+k}. \tag{4.5}$$

Now of the two numbers v_k^+, w_k one vanishes while the other is equal to v_k. Hence the left-hand side in (4.5) is $(\mathbf{v}, \mathbf{x})$, while the right-hand side is easily seen to be of the form

$$v_1\, y_{p_1} + \ldots + v_r\, y_{p_r},$$

where $p_1, \ldots, p_r$ are distinct numbers chosen from $1, \ldots, n$. Thus

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{v}, [\mathbf{y}_\pi]_r)$$

for some $\pi \in \mathfrak{S}_n$, and so

$$(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{v}, \mathbf{x}) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\mathbf{u}, [\mathbf{y}_\pi]_r).$$

Since this holds for every $\mathbf{u} \in \mathfrak{V}_r$, it follows by Lemma 5 that $\mathbf{x}$ lies in the convex hull of the vectors $[\mathbf{y}_\pi]_r$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Thus

$$\mathbf{x} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} t_\pi [\mathbf{y}_\pi]_r = [\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} t_\pi \mathbf{y}_\pi]_r, \tag{4.6}$$

where the t_π are non-negative numbers whose sum is 1. In view of Lemma 4, the vector inside the square bracket on the extreme right of (4.6) can be written in the form $\mathbf{yD}$, where $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$. Thus (ii) implies (iii).

Finally, let (iii) be given; and put $\mathbf{x}' = \mathbf{yD}$. Then $\mathbf{x} = [\mathbf{x}']_r$ and, by Lemma 4, $\mathbf{x}' \prec \mathbf{y}$. Thus (i) holds and the proof is complete.

THEOREM 2. *Let* $1 \leqslant r \leqslant n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$; *and denote by* I *any interval containing all* y_i. *Then each statement in Theorem* 1 *is equivalent to the requirement that the inequality*

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) \tag{4.7}$$

should hold for every function Φ *which is convex and non-negative in* I.

The word 'non-negative' can be omitted for $r = n$ *but not for* $r < n$.

The case $r = n$ of this result is the classical theorem of *Hardy, Littlewood*, and *Pólya* [5, Theorem 8; 6, Theorem 108] referred to earlier; cf. also *Karamata* [8].

To prove the assertion, assume that statement (iii) of Theorem 1 is given and write $\mathbf{D} = (d_{ik})$. Then

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, y_i \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

and so $x_k \in I$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Hence, for any function Φ convex in I,

$$\Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, \Phi(y_i) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r)$$

and so

$$\sum_{k=1}^{r} \Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) \sum_{k=1}^{r} d_{ik}.$$

For $r = n$, this inequality is identical with (4.7); for $r < n$ it implies (4.7) if Φ is non-negative in I.

Next, suppose that (4.7) is valid for every function Φ convex and non-negative in I. Also assume, as may be done without loss of generality, that (4.2) holds. Considering, for $1 \leqslant k \leqslant r$, the function $\Phi(u) = (u - y_k)^+$ and using (4.7), we obtain

$$\sum_{i=1}^{k} x_i - k\, y_k \leqslant \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_k)^+ \leqslant \sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_k)^+ = \sum_{i=1}^{k} y_i - k\, y_k.$$

Thus (4.3) holds for $1 \leqslant k \leqslant r$. Again, using (4.7) with $\Phi(u) = (y_{n-k+1} - u)^+$ (where $1 \leqslant k \leqslant r$), we obtain

$$k\, y_{n-k+1} - \sum_{i=r-k+1}^{r} x_i = \sum_{i=r-k+1}^{r} (y_{n-k+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_{n-k+1} - y_i)^+ = k\, y_{n-k+1} - \sum_{i=n-k+1}^{n} y_i.$$

Thus (4.4) holds for $1 \leqslant k \leqslant r$. But, in view of (4.2), the $2r$ inequalities (4.3) and (4.4) are equivalent to (4.1). Hence the validity of (4.7) for all Φ of the specified type implies statement (ii) in Theorem 1.

Finally, we note that the theorem becomes false if the word 'non-negative' is omitted for $r < n$. For the function $\Phi(u) = u - K$ is convex but fails to satisfy (4.7) if K is suitably chosen.

5. Convex increasing functions

The term 'increasing' is used throughout in the wide sense.

THEOREM 3. *Let* $1 \leqslant r \leqslant n$, $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_r)$, $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$; *and denote by* I *any interval containing all* x_i *and* y_i. *Then the following statements are equivalent.*

(i) *There exists a vector* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{B}_n$ *such that* $\mathbf{x} = [\mathbf{x}']_r$ *and* $\mathbf{x}' \prec\prec \mathbf{y}$.

(ii) *We have* $M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{y})$ *for* $1 \leqslant k \leqslant r$.

(iii) *There exists a matrix* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ *such that* $\mathbf{x} \leqslant [\mathbf{y}\mathbf{D}]_r$.

(iv) *The inequality* (4.7) *holds for every function* Φ *which is convex, increasing, and non-negative in* I.

The word 'non-negative' can be omitted for $r = n$ *but not for* $r < n$.

For $r = n$, this result reduces essentially to a theorem due to *Pólya* [15]. A theorem given by *Horn* [7, Theorem 3] also follows immediately if use is made of Lemmas 1 and 3.

To prove the assertion, let (i) be given. The relation $\mathbf{x}' \prec\prec \mathbf{y}$ means that

$$M_k(\mathbf{x}') \leqslant M_k(\mathbf{y}) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{5.1}$$

But

$$M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{x}') \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

and (ii) follows. Conversely, let (ii) begiven. Then, by adding $n - r$ sufficiently small components to $\mathbf{x}$, we obtain a vector $\mathbf{x}' \in \mathfrak{B}_n$ which satisfies (5.1). Thus (i) and (ii) are equivalent.

Again, if (i) is given, then, by Lemma 2, there exists a matrix $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ such that $\mathbf{x}' \leqslant \mathbf{y}\mathbf{D}$, and so $\mathbf{x} = [\mathbf{x}']_r \leqslant [\mathbf{y}\mathbf{D}]_r$. Thus (i) implies (iii).

If (iii) is given, write $\mathbf{D} = (d_{ik})$. Then

$$x_k \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, y_i \qquad (1 \leqslant k \leqslant r);$$

and therefore, for any function Φ increasing and convex in I,

$$\Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, \Phi(y_i) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) \sum_{k=1}^{r} d_{ik}.$$

For $r = n$, this is identical with (4.7); for $r < n$, it implies (4.7) if it is assumed that Φ is non-negative in I.

Again, let (iv) be given. Considering the functions $(u - y_k)^+$, $1 \leqslant k \leqslant r$, and arguing as in the proof of Theorem 2, we infer that (ii) holds.

Finally, the instance of the function $\Phi(u) = u - K$ (where K is a suitable constant) shows that the word 'non-negative' cannot be omitted from the theorem when $r < n$.

6. Convex functions with a minimum at the origin

Our next result is based on the properties of doubly-substochastic matrices.

THEOREM 4. *Let* $1 \leqslant r \leqslant n$, $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_r)$, $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$; *and denote by* I *any interval containing the numbers* $0, y_1, \ldots, y_n$. *Then the following statements are equivalent**.

* It is clear that the origin does not, in effect, play a special role; and a translation enables us to restate the theorem in a slightly more general form.

(i) *We have* $\mathbf{x}^0 \prec\prec \mathbf{y}^+, -\mathbf{x}^0 \prec\prec (-\mathbf{y})^+$, *where* $\mathbf{x}^0$ *is the vector* $(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{B}_n$.

(ii) *We have*

$$m_k(-(-\mathbf{y})^+) \leqslant m_k(\mathbf{x}),\ M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{y}^+) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

(iii) *There exists a matrix* $\mathbf{E} \in \mathfrak{E}_n$ *such that* $\mathbf{x} = [\mathbf{y}\mathbf{E}]_r$.

(iv) *The inequality* (4.7) *holds for every function* Φ *which is convex in* I *and satisfies* $\Phi(u) \geqslant \Phi(0) \geqslant 0$ *for all* $u \in I$.

The condition $\Phi(0) \geqslant 0$ *can be omitted for* $r = n$ *but not for* $r < n$.

For $r = n$ this result reduces, essentially, to a slightly sharpened version of Theorem 3a in [11].

To prove the theorem, let first (i) be given. Then, by Lemma 3, there exists a matrix $\mathbf{E} \in \mathfrak{E}_n$ such that $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}\mathbf{E}$. Hence $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^0]_r = [\mathbf{y}\mathbf{E}]_r$, and so (i) implies (iii).

If (iii) is given, write $\mathbf{E} = (e_{ik})$. Then, for $1 \leqslant k \leqslant r$,

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} e_{ik}\, y_i = \sum_{i=1}^{n} e_{ik}\, y_i + (1 - \sum_{i=1}^{n} e_{ik}) \,.\, 0.$$

It follows that $x_k \in I (1 \leqslant k \leqslant r)$. Hence, for any function Φ convex in I,

$$\Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} e_{ik}\, \Phi(y_i) + (1 - \sum_{i=1}^{n} e_{ik})\, \Phi(0) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

Now, by Lemma 1, there exists a matrix $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}_n$ such that $\mathbf{E} \leqslant \mathbf{D}$. Writing $\mathbf{D} = (d_{ik})$, we therefore have, for $1 \leqslant k \leqslant r$,

$$\Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, \Phi(y_i) - \sum_{i=1}^{n} (d_{ik} - e_{ik})\, \Phi(y_i) + (1 - \sum_{i=1}^{n} e_{ik})\, \Phi(0).$$

Hence, if $\Phi(u) \geqslant \Phi(0)$ $(u \in I)$, then, for $1 \leqslant k \leqslant r$,

$$\begin{aligned} \Phi(x_k) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, \Phi(y_i) - \sum_{i=1}^{n} (d_{ik} - e_{ik})\, \Phi(0) + (1 - \sum_{i=1}^{n} e_{ik})\, \Phi(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, \Phi(y_i). \end{aligned}$$

It follows that

$$\sum_{k=1}^{r} \Phi(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) \sum_{k=1}^{r} d_{ik}.$$

For $r = n$, this inequality is identical with (4.7); for $r < n$, (4.7) follows from it if the condition $\Phi(0) \geqslant 0$ is made use of. Thus (iii) implies (iv).

We shall next show that (iv) implies (ii). We assume, as before, that (4.2) holds. For $1 \leqslant k \leqslant r$, the function $\Phi(u) = (u - y_k^+)^+$ satisfies the requirements of (iv). Now

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_k^+) = \sum_{i=1}^{k} x_i - k\, y_k^+.$$

Also, considering in turn the cases $y_k \geqslant 0$ and $y_k < 0$, we verify that

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) = \sum_{i=1}^{k} y_i^+ - k\, y_k^+.$$

Hence, by (4.7),

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i^+ \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

i. e.

$$M_k(\mathbf{x}) \leqslant M_k(\mathbf{y}^+) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

Again, the function $\Phi(u) = (-u - (-y_{n-k+1})^+)^+$, where $1 \leqslant k \leqslant r$, satisfies the requirements of (iv). Now

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i) \geqslant \sum_{i=r-k+1}^{r} (-x_i - (-y_{n-k+1})^+)$$

$$= -\sum_{i=r-k+1}^{r} x_i - k(-y_{n-k+1})^+.$$

Also, by considering in turn the cases $y_{n-k+1} \geqslant 0$ and $y_{n-k+1} < 0$, we verify that

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i) = \sum_{i=n-k+1}^{n} (-y_i)^+ - k(-y_{n-k+1})^+.$$

Hence, by (4.7),

$$\sum_{i=r-k+1}^{r} x_i \geqslant -\sum_{i=n-k+1}^{n} (-y_i)^+ \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

i. e.

$$m_k(\mathbf{x}) \geqslant m_k(-(-\mathbf{y})^+) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

Thus (iv) implies (ii). The argument used to establish this implication is virtually the same as that occurring in the proof of Theorem 3a of [11].

Next, we shall show that (ii) implies (i). It is clear that, for $0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}_n$,

$$M_i(\mathbf{u}) \leqslant M_k(\mathbf{u}) \qquad (\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0})$$

$$m_i(\mathbf{u}) \geqslant m_k(\mathbf{u}) \qquad (\mathbf{u} \leqslant \mathbf{0}).$$

Given any k in the range $1 \leqslant k \leqslant n$, there exist integers i, j such that $0 \leqslant i, j \leqslant r$ and

$$M_k(\mathbf{x}^0) = M_i(\mathbf{x}) \leqslant M_i(\mathbf{y}^+) \leqslant M_k(\mathbf{y}^+),$$
$$m_k(\mathbf{x}^0) = m_j(\mathbf{x}) \geqslant m_j(-(-\mathbf{y})^+) \geqslant m_k(-(-\mathbf{y})^+).$$

Thus

$$m_k(-(-\mathbf{y})^+) \leqslant m_k(\mathbf{x}^0),\ M_k(\mathbf{x}^0) \leqslant M_k(\mathbf{y}^+)$$

for $1 \leqslant k \leqslant n$, i.e. $\mathbf{x}^0 \prec\prec \mathbf{y}^+$, $-\mathbf{x}^0 \prec\prec (-\mathbf{y})^+$; and (i) therefore holds.

Finally, by considering the function $\Phi(u) = |u| - K$ (where K is a suitable constant), we note that the condition $\Phi(0) \geqslant 0$ cannot be omitted when $r < n$.

7. Further inequalities

Hardy, *Littlewood*, and *Pólya* [5, Theorem 8] noted (in effect) that a certain system of inequalities involving special convex functions is equivalent to the statements in Theorem 3 for the case $r = n$. There is no difficulty in generalizing their remark.

THEOREM 5. *Let* $1 \leqslant r \leqslant n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

(a) *Every statement in Theorems 1 and 2 is equivalent to the requirement that the inequalities*

$$\sum_{i=1}^{r} (x_i - t)^+ \leqslant \sum_{i=1}^{n} (y_i - t)^+, \tag{7.1}$$

$$\sum_{i=1}^{r} (t - x_i)^+ \geqslant \sum_{i=1}^{n} (t - y_i)^+ \tag{7.2}$$

should hold for all values of t.

(b) *Every statement in Theorem 3 is equivalent to the requirement that* (7.1) *should hold for all values of* t.

(c) *Every statement in Theorem 4 is equivalent to the requirement that* (7.1) *should hold for all* $t \geqslant 0$ *and* (7.2) *for all* $t \leqslant 0$.

The proofs of the three parts are very similar and we shall restrict ourselves to the discussion of (c).

First, suppose that the statement (iv) in Theorem 4 is given. For any $t \geqslant 0$, the function $\Phi(u) = (u - t)^+$ is everywhere convex and satisfies

$$\Phi(u) \geqslant \Phi(0) \geqslant 0 \qquad (\text{all } u). \tag{7.3}$$

Hence, using (4.7), we infer that (7.1) holds for all $t \geqslant 0$. Again, for any

$t \leqslant 0$, the function $\Phi(u) = (t - u)^+$ is everywhere convex and satisfies (7.3). Hence, using (4.7), we infer that (7.2) holds for all $t \leqslant 0$.

Next, suppose that (7.1) holds for all $t \geqslant 0$ and (7.2) for all $t \leqslant 0$. Suppose, furthermore, that (4.2) is satisfied. Taking, in turn, $t = y_k^+$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ in (7.1) and $t = -(-y_{n-k+1})^+$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ in (7.2), and arguing as in the proof of Theorem 4, we infer that statement (ii) in Theorem 4 is valid. This completes the proof of (c).

References

[1] *T. Bonnesen* and *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934.

[2] *C. Davis*, Various averaging operations onto subalgebras. Illinois J. Math. **3**, 538—553 (1959).

[3] *K. Fan*, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators. Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 760—766 (1951).

[4] *K. Fan*, Convex Sets and their Applications. Argonne National Laboratory, 1959.

[5] *G. H. Hardy*, *J. E. Littlewood*, and *G. Pólya*, Some simple inequalities satisfied by convex functions. Messenger of Math. **58**, 145—152 (1929).

[6] *G. H. Hardy*, *J. E. Littlewood*, and *G. Pólya*, Inequalities. Cambridge, 1934.

[7] *A. Horn*, Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. Amer. J. Math. **76**, 620—630 (1954).

[8] *J. Karamata*, Sur une inégalité relative aux fonctions convexes. Publ. math. Univ. Belgrade **1**, 145—148 (1932).

[9] *L. Mirsky*, Proofs of two theorems on doubly-stochastic matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 371—374 (1958).

[10] *L. Mirsky*, On a convex set of matrices. Archiv der Math. **10**, 88—92 (1959).

[11] *L. Mirsky*, Inequalities for certain classes of convex functions. Proc. Edinburgh Math. Soc. **11**, 231—235 (1959).

[12] *L. Mirsky*, Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. Quart. J. Math. (Oxford), (2), **11**, 50—59 (1960).

[13] *J. von Neumann*, A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. Contributions to the Theory of Games, vol. II, ed. *H. W. Kuhn* and *A. W. Tucker*. Princeton, 1953, 5—12.

[14] *A. Ostrowski*, Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur. J. Math. Pures Appl. (9), **31**, 253—292 (1952).

[15] *G. Pólya*, Remark on Weyl's note: Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proc. Nat. Acad. Sci. **36**, 49—51 (1950).

[16] *R. Rado*, An inequeality. J. London Math. Soc. **27**, 1—6 (1952).

[17] *H. Weyl*, Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 408—411 (1949).

Über die Rotation von Tensorfeldern

Von

Josef Weier, Bonn

(Eingegangen am 28. Juni 1960)

Sind V, W differenzierbare Mannigfaltigkeiten, ω ein covariantes Tensorfeld r-ter Stufe über W und f eine stetig differenzierbare Abbildung von V in W, so bestimmt (f, ω) ein über V definiertes r-fach covariantes Tensorfeld, das man häufig mit $f^* \omega$ bezeichnet. Ist ω schiefsymmetrisch und bedeutet $d\omega$ das äußere Differential von ω, das danach ein schiefsymmetrisches $(r+1)$-fach covariantes Tensorfeld ist, so gilt bekanntlich

$$f^* d\omega = d f^* \omega.$$

Zwei andere Beziehungen, von denen fast jede Darstellung der Theorie äußerer Differentialformen ausgeht, sind die Gleichungen

$$dd\omega = 0 \text{ und } \int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega,$$

wobei X eine differenzierbare $(r+1)$-Mannigfaltigkeit in W bedeutet. Andererseits weiß man, daß die vorstehenden Beziehungen im wesentlichen zur Entwicklung der Theorie der Cartanschen Formen ausreichen, im Reellen wie im Komplexen [8].

Obschon nun die Rotation (vgl. etwa [5] uud [7] eines covarianten Tensorfeldes gleich dem äußeren Differential des schiefsymmetrischen Teiles [1] dieses Feldes ist, bedeutet es keine leere Verallgemeinerung, wenn man in den vorstehenden Gleichungen ω durch ein beliebiges covariantes Tensorfeld T und d durch rot ersetzt. Denn es wird dann auf der rechten Seite der letzten Integralgleichung nicht nur über den schiefsymmetrischen Teil von T integriert. Einen sehr durchsichtigen und allgemeinen Beweis des Stokesschen Integralsatzes für schiefsymmetrische Tensorfelder findet man in [9]. Dieser Beweis wird hier so modifiziert, daß man zu der Gleichung

$$\int_X \operatorname{rot} T = c \int_{\partial X} T$$

gelangt, wo c ein durch die Definition des skalaren Produktes bestimmter Normierungsfaktor ist. Freilich wird dabei die lange bis in die Gegenwart hineinreichende Reihe von Beweisen des Stokesschen Integralsatzes nur um ein neues Glied vermehrt.

1. Präliminarien. — Zur Ergänzung dieser Einleitung vergleiche man [2] bis [4].

Bis zum Schlusse der Arbeit seien n eine natürliche Zahl, E ein n-dimensionaler euklidischer Raum, V der zu E gehörige euklidische Vektorraum, V^* der zu V duale Vektorraum, $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V und $(e^1 \ldots e^n)$ die zu $(e_1 \ldots e_n)$ duale Basis.

Für alle $(2r+1)$-Tupel natürlicher Zahlen $r, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_r$ sei $\varepsilon[\lambda_1 \ldots \lambda_r; \mu_1 \ldots \mu_r]$ wie folgt bestimmt. Sind die λ_i paarweis verschieden und ist $(\mu_1 \ldots \mu_r)$ eine Permutation von $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$, so ist $\varepsilon[\lambda_1 \ldots \lambda_r; \mu_1 \ldots \mu_r]$ gleich 1 oder -1, je nachdem die genannte Permutation gerade oder ungerade; in allen anderen Fällen ist $\varepsilon[\lambda_1 \ldots \lambda_r; \mu_1 \ldots \mu_r] = 0$. Statt $\varepsilon[\lambda_1 \ldots \lambda_r; \mu_1 \ldots \mu_r]$ schreiben wir auch

$$\varepsilon^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r} \text{ oder sign } \binom{\lambda_1 \ldots \lambda_r}{\mu_1 \ldots \mu_r}.$$

Ist $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$ eine Permutation von $(1 \ldots r)$, so schreiben wir statt $\varepsilon[\lambda_1 \ldots \lambda_r; 1 \ldots r]$ auch sign $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$.

Sind $v^1, \ldots, v^r$ Vektoren aus V^*, also Covektoren über V, so bedeute $v^1 \times \ldots \times v^r$ jene r-lineare Abbildung über V, die dem r-Tupel $(x_1 \ldots x_r)$ von Vektoren x_i aus V die Zahl

$$(v^1 \times \ldots \times v^r) \,.\, (x_1 \ldots x_r) = v^1(x_1) \ldots v^r(x_r)$$

zuordnet*. Dabei ist $v^i(x_i)$ das Bild von x_i bei der Abbildung v^i. Sind $v_1, \ldots, v_r$ Elemente aus V, so ist $v_1 \times \ldots \times v_r$ jene r-lineare Abbildung über V^*, die dem r-Tupel $(x^1 \ldots x^r)$ von Vektoren x^i aus V^* die Zahl

$$(v_1 \times \ldots \times v_r) \,.\, (x^1 \ldots x^r) = x^1(v_1) \ldots x^r(v_r)$$

zuordnet.

Jede r-lineare Abbildung f über V^* läßt sich darstellen als

$$f = \Sigma\, a_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e^{\lambda_1} \times \ldots \times e^{\lambda_r}, \tag{1}$$

wobei über alle r-Tupel $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$ natürlicher Zahlen $\lambda_i \leq n$ zu summieren ist. Das Summenzeichen ist so zu verstehen:

---

* Das Tensorprodukt wird durchgehend mit $\times$ bezeichnet, direkte Produkte kommen nirgends vor.

$$f(x_1 \dots x_r) = \Sigma\, a_{\lambda_1 \dots \lambda_r}\, [(e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (x_1 \dots x_r)].$$

Ebenso läßt sich jede r-lineare Abbildung g über V darstellen als

$$g = \Sigma\, \beta^{\lambda_1 \dots \lambda_r}\, e_{\lambda_1} \times \dots \times e_{\lambda_r}. \tag{2}$$

Es heißen r-lineare Abbildungen über V auch r-fach covariante Tensoren über V, r-lineare Abbildungen über V^* auch r-fach kontravariante Tensoren über V. Statt r-fach covariant, r-fach kontravariant sagen wir unten kürzer r-covariant bzw. r-kontravariant.

Das „*Skalarprodukt*" des r-covarianten Tensors $v^1 \times \dots \times v^r$ mit dem r-kontravarianten Tensor $x_1 \times \dots \times x_r$ ist die Zahl $v^r(x_r) \dots v^r(x_r)$, die wir auch mit

$$(v^1 \times \dots \times v^r) \,.\, (x_1 \times \dots \times x_r)$$

bezeichnen. Offenbar ist

$$(e_{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_{\mu_1} \times \dots \times e_{\mu_r}) = \delta^{\lambda_1}_{\mu_1} \dots \delta^{\lambda_r}_{\mu_r}.$$

Das Skalarprodukt eines beliebigen r-covarianten Tensors $\Sigma\, a_i(v_i^1 \times \dots \times v_i^r)$ mit einem beliebigen r-kontravarianten Tensor $\Sigma\, b_i(x_{i1} \times \dots \times x_{ir})$ ist die Zahl

$$\Sigma_{ij}\, a_i\, b_j(v_i^1 \times \dots \times v_i^r) \,.\, (x_{j1} \times \dots \times x_{jr}).$$

Offenbar ist das Skalarprodukt der obigen Tensoren (1) und (2) gleich

$$\Sigma\, \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_r}\, \beta^{\lambda_1 \dots \lambda_r},$$

wobei über alle r-Tupel $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ natürlicher Zahlen $\lambda_i \leq n$ zu summieren ist, nicht nur über die r-Tupel $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$.

Der Tensor $f = \Sigma\, \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_r} e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}$ heißt schiefsymmetrisch, wenn für alle r-Tupel $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ und jede Permutation $(\mu_1 \dots \mu_r)$ von $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ gilt:

$$\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} = \varepsilon[\lambda_1 \dots \lambda_r; \mu_1 \dots \mu_r]\, \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_r}.$$

Sind f schiefsymmetrisch und $v_1, \dots, v_r$ Vektoren aus V, so gilt

$$f \,.\, (v_1 \times \dots \times v_r) = \operatorname{sign}(\lambda_1 \dots \lambda_r)\, f \,.\, (v_{\lambda_1} \times \dots \times v_{\lambda_r})$$

für jede Permutation $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ von $(1 \dots r)$.

Da V euklidisch, ist für jedes Paar von Vektoren u, v aus V das Skalarprodukt, das man auch mit $u \,.\, v$ bezeichnet, erklärt. Sind $u_1, \dots, u_r$, ebenso $v_1, \dots, v_r$ Vektoren aus V, so ist das Skalarprodukt von $u_1 \times \dots \times u_r$ und $v_1 \times \dots \times v_r$ die Zahl

$$(u_1 \cdot v_1) \ldots (u_r \cdot v_r),$$

die man auch mit $(u_1 \times \ldots \times u_r) \cdot (v_1 \times \ldots \times vl)$ bezeichnet. Allgemein ist das skalare Produkt der beiden kontravarianten Tensoren $\Sigma a_i(u_{i1} \times \ldots \times u_{ir})$ und $\Sigma b_i(v_{i1} \times \ldots \times v_{ir})$ die Zahl

$$\Sigma_{ij}\, a_i\, b_j\, (u_{i1} \cdot v_{j1}) \ldots (u_{ir} \cdot v_{jr}).$$

Die positive Wurzel aus der Zahl $(v_1 \times \ldots \times v_r) \cdot (v_1 \times \ldots \times v_r) = v_1 \cdot v_1 \ldots v_2 \cdot v_2$ bezeichnet man auch mit $| v_1 \times \ldots \times v_r |$. Ersichtlich ist $| v_i |$ der Betrag des Vektors v_i.

Seien wieder $v_1 \ldots, v_r$ Vektoren aus V. Dann bezeichnet man den Tensor Σ sign $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)\, v_{\lambda_1} \times \ldots \times v_{\lambda_r}$, wo über alle Permutationen $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$ von $(1 \ldots r)$ zu summieren ist, auch mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$.

Sind C eine orientierte r-Zelle in E, L der von C aufgespannte euklidische r-Raum und $\mathrm{vol}_r(C)$ das positive r-Volumen von C, so gibt es Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ in V mit den Eigenschaften: jedes v_i ist zu L parallel,

$$| v_1 \wedge \ldots \wedge v_r | = \mathrm{vol}_r(C),$$

in der natürlichen Reihenfolge bestimmen die v_i die von C in L induzierte Orientierung. Sind $w_1, \ldots, w_r$ Vektoren aus V mit den gleichen Eigenschaften, so ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = w_1 \wedge \ldots \wedge w_r$. Der letztere Tensor, der offenbar schiefsymmetrisch r-kontravariant ist, heiße der „zu C gehörige Tensor".

Sei jetzt die Basis $(e_1 \ldots e_n)$ orthonormiert und g schiefsymmetrisch. Nach der obigen Definition von $| v_1 \times \ldots \times v_r |$ ist dann

$$| g | = \sqrt{\Sigma(\beta^{\lambda_1 \cdots \lambda_r})^2} = \sqrt{1/r!\ \Sigma'(\beta^{\lambda_1 \cdots \lambda_r})^2},$$

wobei die gestrichene Summe nur über die r-Tupel $\lambda_1 < \ldots < \lambda_r$ zu erstrecken ist. Hätten wir $(v^1 \times \ldots \times v^r) \cdot (x_1 \ldots x_r)$ und $(| v_1 \times \ldots \times v_r |)^2$ als

$$\frac{1}{r!}\, v^1(x_1) \ldots v^r(x_r) \text{ bzw. als } \frac{1}{r!}\, v_1 \cdot v_1 \ldots v_r \cdot v_r$$

definiert, so ergäbe sich $| g | = \sqrt{\Sigma'(\beta^{\lambda_1 \cdots \lambda_r})^2}$. Bei der Untersuchung äußerer Differentialformen legt man diese letztere Definition zugrunde.

2. Die Rotation eines Tensorfeldes. — Ist jedem Punkte $p \in E$ ein r-covarianter Tensor $T(p) = \Sigma t_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(p)\, e^{\lambda_1} \times \ldots \times e^{\lambda_r}$ zugeordnet und sind die reellen Funktionen $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ zweimal stetig differenzierbar, so heiße T ein r-covariantes Tensorfeld über E. Entsprechend seien r-kontravariante Tensorfelder definiert.

Sind φ eine stetig differenzierbare Abbildung von E in die reellen Zahlen, p ein Punkt aus E und v ein Vektor aus V, so bezeichne $\nabla\varphi\,(p, v) = (\nabla_v \varphi)\,(p)$ die Zahl $\lim\,[\varphi(p + tv) - \varphi(p)]/t$. Bei festem v ist also $\nabla_v \varphi$ eine stetige Abbildung von E in die reellen Zahlen. Statt $\nabla_{e_i} \varphi$ schreibt man auch $\partial \varphi / \partial x^i$. Es ist $\nabla_v T$ das r-covariante Tensorfeld

$$\nabla_v T = \Sigma\, t'_{\lambda_1 \dots \lambda_r} e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r} \text{ mit } t'_{\lambda_1 \dots \lambda_r} = \nabla_v t_{\lambda_1 \dots \lambda_r}.$$

Wie man leicht bestätigt, gilt $\nabla_{av} T = a\, \nabla_v T$ und $\nabla_{v+w} T = \nabla_v T + \nabla_w T$ für alle Vektoren v, w aus V und alle reellen Zahlen a.

Jetzt ist die „*Rotation*" des r-covarianten Tensorfeldes $T = \Sigma\, t_{\lambda_1 \dots \lambda_r} e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}$ das $(r+1)$-covariante Tensorfeld

$$\text{rot } T = \Sigma\, T_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} e^{\mu_1} \times \dots \times e^{\mu_{r+1}}$$

mit

$$T_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} = \frac{1}{r!} \Sigma\, \varepsilon^{h\, \lambda_1 \dots \lambda_r}_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} \partial t_{\lambda_1 \dots \lambda_r} / \partial x^h.$$

Zu summieren ist über alle Permutationen $(h, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ von $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$. Man kann die reelle Funktion $T_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}}$ auch so definieren: sind die μ_i nicht paarweis verschieden, so ist $T_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} = 0$; sonst ist

$$T_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}}(p) = \frac{1}{r!} \Sigma\, \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}}_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} \nabla\, t_{\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}}\,(p, e^{\lambda_1})$$

für alle Punkte p aus E, wobei wieder über alle Permutationen $(\lambda_1 \dots \lambda_{r+1})$ von $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ zu summieren ist.

Man überlegt sich leicht, daß das Feld rot T schiefsymmetrisch ist, ferner daß rot $(T_1 + T_2) =$ rot $T_1 +$ rot T_2 und, wenn c eine Konstante bezeichnet, rot $(c\, T) = c$ rot T gilt. Bekanntlich (vgl. etwa [6]) ist rot rot $T = 0$.

Ist $T = \Sigma\, t_i\, e^i$ ein Feld von Covektoren über einem euklidischen 3-Raume, so stimmen die drei wesentlichen Komponenten des schiefsymmetrischen 2-covarianten Tensorfeldes rot T mit den drei Komponenten desjenigen Vektorfeldes überein, das man in der Vektoranalysis als die Rotation von T bezeichnet.

Sind $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ eine andere Basis von V, $(\bar{e}^1 \dots \bar{e}^n)$ die zu $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ duale Basis und $\bar{e}^i = \Sigma\, \xi^i_a e^a$, ferner rot $T = \Sigma\, \overline{T}_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} \bar{e}^{\mu_1} \times \dots \times e^{\mu_{r+1}}$, so gilt

$$T_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} = \Sigma\, \xi^{\lambda_1}_{\mu_1} \dots \xi^{\lambda_{r+1}}_{\mu_{r+1}} \overline{T}_{\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}},$$

wie man leicht nachrechnet oder der Definition eines $(r+1)$-covarianten Tensors als basisabhängiges n^{r+1}-Tupel reeller Zahlen entnimmt.

Satz 1. *Sei* $T = A\, e^{\lambda_1} \times \ldots \times e^{\lambda_r}$ *ein r-covariantes Tensorfeld über E. Dann ist*

$$(rot\ T)_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} = \frac{1}{r!}\ \varepsilon^{h\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}}\ \partial A/\partial x^h,$$

wenn gleichzeitig: die μ_i *paarweis verschieden sind und* $(h, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *eine Permutation von* $(\mu_1 \ldots \mu_{r+1})$ *ist. In allen übrigen Fällen ist* $(rot\ T)_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} = 0$.

Beweis. Mit $T = \Sigma A_{\zeta_1 \ldots \zeta_r} e^{\zeta_1} \times \ldots \times e^{\zeta_r}$ ist $A_{\zeta_1 \ldots \zeta_r} = 0$ für alle $(\zeta_1 \ldots \zeta_r) \neq (\lambda_1 \ldots \lambda_r)$. Definitionsgemäß ist

$$(\mathrm{rot}\ T)_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} = \frac{1}{r!}\ \Sigma\, \varepsilon^{i\,\zeta_1 \ldots \zeta_r}_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}}\ \partial A_{\zeta_1 \ldots \zeta_r}/\partial x^i.$$

Also

$$(\mathrm{rot}\ T)_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} = \frac{1}{r!}\ \Sigma_i\ \varepsilon^{i\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}}\ \partial A/\partial x^i.$$

Damit $\varepsilon^{i\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} \neq 0$, müssen die μ_k paarweis verschieden und $(i, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ eine Permutation von $(\mu_1 \ldots \mu_{r+1})$ sein. Offenbar gibt es nur ein solches i, es heiße h.

Bekanntlich [7] gilt:

Satz 2. *Wenn* $T = \Sigma\, t_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}\, e^{\lambda_1} \times \ldots \times e^{\lambda_r}$ *ein schiefsymmetrisches r-covariantes Tensorfeld über E und rot* $T = \Sigma\, T_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}}\, e^{\mu_1} \times \ldots \times e^{\mu_{r+1}}$, *so ist*

$$T_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} = \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1}\, \partial t_{\mu_1 \ldots \hat{\mu}_i \ldots \mu_{r+1}}/\partial x^{\mu_i}$$

für alle $(r+1)$*-Tupel* $(\mu_1 \ldots \mu_{r+1})$.

Beweis. Definitionsgemäß ist

$$T_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}} = \frac{1}{r!}\ \Sigma\ \varepsilon^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1}}_{\mu_1 \ldots \mu_{r+1}}\, \partial t_{\lambda_2 \ldots \lambda_{r+1}}/\partial x^{\lambda_1}.$$

Sei $\lambda_1 = \mu_i$. Dann ist $\partial t_{\lambda_2 \ldots \lambda_{r+1}}/\partial x^{\lambda_1}$

$$= \varepsilon[\lambda_2 \ldots \lambda_{r+1}; \mu_1 \ldots \hat{\mu}_i \ldots \mu_{r+1}]\ \partial t_{\mu_1 \ldots \hat{\mu}_i \ldots \mu_{r+1}}/\partial x^{\mu_i}$$

$$= \varepsilon[\mu_i, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}; \mu_i, \mu_1, \ldots, \hat{\mu}_i, \ldots, \mu_{r+1}]\ \partial t_{\mu_1 \ldots \hat{\mu}_i \ldots \mu_{r+1}}/\partial x^{\mu_i}$$

$$= (-1)^{i-1}\, \varepsilon[\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1}; \mu_1 \ldots \mu_{r+1}]\ \partial t_{\mu_1 \ldots \hat{\mu}_i \ldots \mu_{r+1}}/\partial x^{\mu_i}.$$

Ferner ist

$$\Sigma\, \varepsilon[\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}; \mu_1 \dots \mu_{r+1}] = \Sigma_{i=1}^{r+1}\, \Sigma'\, \varepsilon[\mu_i, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}; \mu_1 \dots \mu_{r+1}].$$

Die gestrichene Summe ist über alle Permutationen $(\lambda_2 \dots \lambda_{r+1})$ von $(\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{r+1})$ zu erstrecken. Somit ist

$$\frac{1}{r!}\, \Sigma\, \varepsilon[\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}; \mu_1 \dots \mu_{r+1}]\, \partial\, t_{\lambda_2 \dots \lambda_{r+1}}/\partial\, x^{\lambda_1}$$

$$= \frac{1}{r!}\, \Sigma_{i=1}^{r+1}\, \Sigma'\, \varepsilon[\mu_i, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}; \mu_1 \dots \mu_{r+1}]\, (-1)^{i-1} \cdot$$

$$\cdot\, \varepsilon[\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}; \mu_1 \dots \mu_{r+1}]\, \partial t_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{r+1}}/\partial x^{\mu_i}$$

$$= \frac{1}{r!}\, \Sigma_{i=1}^{r+1}\, (-1)^{i-1}\, r!\, \partial\, t_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{r+1}}/\partial\, x^{\mu_i},$$

wie behauptet.

3. Skalares Produkt mit der Rotation. — Sind ω ein schiefsymmetrisches r-covariantes Tensorfeld über E, $d\omega$ das äußere Differential von ω, p ein Punkt aus E und $v_1, \dots, v_{r+1}$ Vektoren aus V, so läßt sich bekanntlich das Skalarprodukt der Tensoren $(d\omega)(p)$ und $v_1 \wedge \dots \wedge v_{r+1}$ ausdrücken durch die Skalarprodukte der r-Tensoren $(\nabla_{v_i} \omega)(p)$ und $v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_{r+1}$. Etwas Ähnliches ist möglich, wenn man statt des äußeren Differentiales schiefsymmetrischer covarianter Tensorfelder die Rotation beliebiger covarianter Tensorfelder betrachtet.

Satz 3. *Ist r eine natürliche Zahl und $T = A\, e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}$ ein r-covariantes Tensorfeld über E, so gilt* $(rot\, T) \,.\, (e_{\mu_1} \times \dots \times e_{\mu_{r+1}})$

$$= \frac{1}{r!}\, \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{e_{\mu_i}} A)\, (e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge e_{\mu_{r+1}})$$

für alle $(r+1)$-Tupel $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ natürlicher Zahlen $\mu_i \leq n$.

Beweis. Die linke Seite der letzten Gleichung bezeichnen wir auch mit $L(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$, die rechte auch mit $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$.

Sind die λ_i nicht paarweis verschieden, so ist, wie aus Satz 1 folgt, rot $T = 0$. Das Skalarprodukt

$$(e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge e_{\mu_{r+1}})$$

ist nur dann $\neq 0$, wenn $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ in $(\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{r+1})$ vorkommt. Dann kommt aber in $(\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{r+1})$ mindestens ein μ_i zweimal vor. Also ist

$$(e_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge e_{\mu_{r+1}}) = 0,$$

daher $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1}) = 0$. Weiterhin seien die λ_i paarweis verschieden.

Es seien *erstens* die μ_i nicht paarweis verschieden. Hier ist, da rot T schiefsymmetrisch, $(\text{rot } T) \,.\, (e_{\mu_1} \times \dots \times e_{\mu_{r+1}}) = 0$. Es ist auch $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1}) = 0$, wie wir zeigen wollen.

Kommt $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ in $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ nicht vor, so ist die Gleichung richtig. Kommt $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ in $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ vor, so besteht, da die λ_i paarweis verschieden sind, $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ aus $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ und einer der Zahlen λ_i, die genau zweimal vorkommt. Vertauscht man in $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ zwei nebeneinanderstehende μ_i, so wechselt $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ das Vorzeichen. Also ist $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1}) = 0$ genau dann, wenn $R(\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{r+1}) = 0$ für eine gewisse Permutation $(\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{r+1})$ von $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$. Es genügt daher die r Permutationen

$$(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \dots, (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r), \dots, (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_r\, \lambda_r)$$

zu untersuchen. Hier ist aber die Behauptung richtig, da stets

$$(e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_r}) = 1.$$

Denn $(e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_{\nu_1} \times \dots \times e_{\nu_r})$ ist 1 oder 0, je nachdem $(\nu_1 \dots \nu_r) = (\lambda_1 \dots \lambda_r)$ oder $(\nu_1 \dots \nu_r) \neq (\lambda_1 \dots \lambda_r)$.

Zweitens seien die μ_i paarweis verschieden. Vertauscht man in $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ zwei nebeneinanderstehende μ_i, so wechselt $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ das Vorzeichen. Ebenso wechselt $L(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ bei Vertauschung zweier nebeneinanderstehender μ_i das Vorzeichen. Also genügt es, die Gleichung $L(\xi_1 \dots \xi_{r+1}) = R(\xi_1 \dots \xi_{r+1})$ für eine Permutation $(\xi_1 \dots \xi_{r+1})$ von $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ zu beweisen.

Kommt $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ in $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ nicht vor, so ist $L(\mu_1 \dots \mu_{r+1}) = 0$ und ebenso $R(\mu_1 \dots \mu_{r+1}) = 0$. Jetzt möge $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ in $(\mu_1 \dots \mu_{r+1})$ vorkommen. Sei h das zu $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ fremde μ_i. Dann genügt es also zu zeigen, daß $L(h, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = R(h, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Nun ist

$$R(h, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = \frac{1}{(r-1)!} (\nabla_{e_h} A)\, (e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_{\lambda_r} \times \dots \times e_{\lambda_r})$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i=2}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{e_{\lambda_i}} A)\, (e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_r}) \,.\, (e_h \times e_{\lambda_1} \times \dots \times \hat{e}_{\lambda_i} \times \dots \times e_{\lambda_r}).$$

Jeder einzelne Summand aus der über $i = 2, 3, \dots, r+1$ erstreckten Summe verschwindet. Daher

$$R(h, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \frac{1}{(r-1)!} (\nabla_{e_h} A) = \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial A}{\partial x^h}.$$

Nach Satz 1 ist aber auch $L(h, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = (1/(r-1)!)\, \partial A/\partial x^h$.

Aus Satz 3 folgt sofort:

Satz 4. *Ist* $T = \Sigma T_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e^{\lambda_1} \times \ldots \times e^{\lambda_r}$ *ein r-covariantes Tensorfeld über E, so gilt*

$$(rot\, T) \,.\, (e_{\mu_1} \times \ldots \times e_{\mu_{r+1}}) =$$

$$= \frac{1}{r!} \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{e_{\mu_i}} T) \,.\, (e_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{\mu_i} \wedge \ldots \wedge e_{\mu_{r+1}}).$$

Fast ebenso einfach ergeben sich die drei folgenden Sätze.

Satz 5. Seien $T = \Sigma T_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e^{\lambda_1} \times \ldots \times e^{\lambda_r}$ *ein r-covariantes Tensorfeld über E und* $v_1, \ldots, v_{r+1}$ *Vektoren aus V. Dann ist*

$$(rot\, T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times v_{r+1}) = \frac{1}{r!} \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{v_i} T) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_{r+1}).$$

Beweis. Mit $v_i = \Sigma\, \xi_i^a\, e_a$ ist $(\text{rot } T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times v_{r+1})$

$$= (\text{rot } T) \,.\, \Sigma\, (\xi_1^{\lambda_1} e_{\lambda_1} \times \ldots \times \xi_{r+1}^{\lambda_{r+1}} e_{\lambda_{r+1}})$$

$$= \Sigma\, \xi_1^{\lambda_1} \ldots \xi_{r+1}^{\lambda_{r+1}} (\text{rot } T) \,.\, (e_{\lambda_1} \times \ldots \times e_{\lambda_{r+1}})$$

$$= \Sigma\, \xi_1^{\lambda_1} \ldots \xi_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \frac{1}{r!} \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{e_{\lambda_i}} T) \,.\, (e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{\lambda_i} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_{r+1}})$$

$$= \frac{1}{r!} \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1}\, \Sigma\, (\nabla_{\xi_i^{\lambda_i} e_{\lambda_i}} T) \,.\, (\xi_1^{\lambda_1} e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{\lambda_i} \wedge \ldots \wedge \xi_{r+1}^{\lambda_{r+1}} e_{\lambda_{r+1}})$$

$$= \frac{1}{r!} \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i} (\nabla_{v_i} T) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_{r+1}),$$

wie behauptet.

Satz 6. *Die Bedeutung von T und* $v_1, \ldots, v_{r+1}$ *sei die gleiche wie in Satz* 5. *Dann ist*

$$(rot\, T) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+1}) = (r+1)\, \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{v_i} T) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_{r+1}).$$

Beweis. Definitionsgemäß ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+1} = \Sigma\, \text{sign}\, (\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1})$ $v_{\lambda_1} \times \ldots \times v_{\lambda_{r+1}}$. Zu summieren ist über alle Permutationen $(\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1})$ von $(1 \ldots r+1)$. Überdies ist rot T schiefsymmetrisch. Also

$$(\text{rot } T) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+1}) = (\text{rot } T) \,.\, \Sigma \,\text{sign}\,(\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1})\, v_{\lambda_1} \times \ldots \times v_{\lambda_{r+1}}$$
$$= (\text{rot } T) \,.\, \Sigma \,\text{sign}\,(\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1}) \,\text{sign}\,(\lambda_1 \ldots \lambda_{r+1})\, v_1 \times \ldots \times v_{r+1}$$
$$= (r+1)!\,(\text{rot } T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times v_{r+1}),$$

so daß Satz 6 aus Satz 5 folgt.

Satz 7. *Seien T ein schiefsymmetrisches r-covariantes Tensorfeld über E und $v_1, \ldots, v_{r+1}$ Vektoren aus V. Dann ist*

$$(\text{rot } T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times v_{r+1}) = \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{v_i} T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times \hat{v}_i \times \ldots \times v_{r+1})$$

Beweis. Für jeden Vektor v aus V ist auch $\nabla_v T$ ein schiefsymmetrisches Tensorfeld. Nach Satz 5 ist

$$(\text{rot } T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times v_{r+1}) = \frac{1}{r!}\, \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{v_i} T) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_{r+1}),$$

also $(\text{rot } T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times v_{r+1})$

$$= \frac{1}{r!}\, \Sigma_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla_{v_i} T) \,.\, \Sigma \,\text{sign} \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots\ldots\ldots \lambda_r \\ 1 \ldots \hat{i} \ldots r+1 \end{pmatrix} (v_{\lambda_1} \times \ldots \times v_{\lambda_r}).$$

Dabei ist aber alle Permutation $(\lambda_1 \ldots \lambda_r)$ von $(1 \ldots \hat{i} \ldots r+1)$ zu summieren.

Da $\nabla_{v_i} T$ ein schiefsymmetrischer Tensor, ist, wenn w_i Vektoren aus V und $(\mu_1 \ldots \mu_r)$ eine Permutation von $(1 \ldots r)$ bedeuten,

$$(\nabla_{v_i} T) \,.\, (w_1 \times \ldots \times w_r) = \text{sign}\,(\mu_1 \ldots \mu_r)\, (\nabla_{v_i} T) \,.\, (w_{\mu_1} \times \ldots \times w_{\mu_r}).$$

Also

$$(\nabla_{v_i} T) \,.\, \Sigma \,\text{sign} \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots\ldots\ldots \lambda_r \\ 1 \ldots \hat{i} \ldots r+1 \end{pmatrix} (v_{\lambda_1} \times \ldots \times v_{\lambda_r}) =$$
$$= r!\, (\nabla_{v_i} T) \,.\, (v_1 \times \ldots \times \hat{v}_i \times \ldots \times v_{r+1}),$$

woraus der obige Satz folgt.

4. Zum Stokesschen Integralsatz. — Wie oben seien E ein euklidischer n-Raum und V der zu E gehörige euklidische Vektorraum. Sind C eine orientierte r-Zelle in E, q der Mittelpunkt von C und T ein r-covariantes Tensorfeld über E, so bedeute

$$T(C) = T \,.\, C$$

die Zahl $T \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)$, wo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ der zu C gehörige Tensor ist. Sind C_i die durch ∂C orientierten $(r-1)$-Randzellen von C und T' ein $(r-1)$-covariantes Tensorfeld über E, so ist $T'(\partial C) = \Sigma\, T'(C_i)$. Es bedeute

$$_C\!\int T$$

die Zahl $\lim \Sigma_k T(C_{ik})$ für $i \to \infty$, wobei die C_{ik} die orientierten r-Zellen einer Zellenzerlegung S_i von C sind und die Durchmesser der Zellen von S_i für $i \to \infty$ gegen Null konvergieren. Die Zahl $\| T_p \|$ sei durch

$$\| T_p \| = \sup | T_p \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) |,$$

wobei die v_i alle Vektoren aus V mit $| v_1 \vee \ldots \vee v_r | = 1$ durchlaufen, definiert. Man bestätigt leicht, daß

$$| T \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) | \leq r! \, | v_1 | \ldots | v_r | \,.\, \| T \|.$$

Die beiden folgenden Hilfssätze leuchten fast unmittelbar ein, so daß wir auf einen Beweis verzichten: Der erste Hilfssatz folgt aus der Definition des Integrals, der zweite Hilfssatz ist eine einfache Folgerung aus dem Mittelwertsatze.

Hilfssatz 1. *Seien C eine orientierte r-Zelle aus E, C_i die r-Zellen einer Zellenzerlegung von C in der durch C bestimmten Orientierung, T ein r-covariantes Tensorfeld über E und ε eine positive Zahl, so daß $\| T_q - T_p \| < \varepsilon$ für alle Punktpaare (p, q), die im gleichen C_i liegen. Dann ist*

$$| {}_C\!\int T - \Sigma T \,.\, C_i | \leq \varepsilon \, vol_r(C)$$

wobei $vol_r(C)$ das r-Volumen von C bedeutet.

Hilfssatz 2. *Seien $a \neq b$ Punkte aus E, v der Vektor $a \to b$ und T_p für jeden Punkt $p \in \overline{ab}$ ein r-covarianter Tensor von V. Es sei T stetig differenzierbar. Zu jedem r-kontravarianten Tensor x über V gibt es dann einen Punkt q auf $\overline{ab}$ mit $T_b \,.\, x - T_a \,.\, x = (\nabla_v T)_q \,.\, x$.*

Auf Satz 6 und Hilfssatz 2 wollen wir zurückführen:

Hilfssatz 3. *Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren aus V, C die durch die v_i bestimmte orientierte n-Zelle, ∂C der orientierte Rand von C und T ein $(n-1)$-covariantes Tensorfeld über E. Dann ist*

$$(rot\ T).C - (nT).\partial C = n \, \Sigma_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} [(\nabla_{v_i} T)_q - (\nabla_{v_i} T)_{q_i}] \,. \\ \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n),$$

wobei die Punkte $q, q_1, \ldots, q_n$ in C liegen.

Beweis. Seien C_{i0}, C_{i1} derart die zu $(v_1 \ldots \hat{v}_i \ldots v_n)$ parallelen $(n-1)$-Seiten von C, daß C_{i0} den Nullpunkt von E enthält. Es sei C_{ij} mit der von ∂C induzierten Orientierung versehen. Für alle i ist dann

$$(-1)^{i-1}(v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n)$$

der zu C_{i1} und $-(-1)^{i-1}(v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n)$ der zu C_{i0} gehörige Tensor. Seien q der Mittelpunkt von C und q_{ij} der Mittelpunkt von C_{ij}. Dann ist

$$T \,.\, \partial C = \Sigma_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\, T_{q_{i1}} \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n) - \Sigma_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\, T_{q_{i0}} \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n).$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es auf der Strecke $q_{i0}\, q_{i1}$ einen Punkt q_i mit

$$(T_{q_{i1}} - T_{q_{i0}}) \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n) = (\nabla_{v_i} T)_{q_i} \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n).$$

Also ist $(\text{rot}\ T).\ C - (n\ T).\ \partial C$

$$= (\text{rot}\ T)_q \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) - n\ \Sigma_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} (\nabla_{v_i} T)_{q_i} \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n).$$

Hieraus und aus Satz 6 folgt die Behauptung.

Hilfssatz 4. *Seien T ein $(n-1)$-covariantes Tensorfeld über E und $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren aus V, weiter X eine in E offene Menge und ε eine positive Zahl, so daß*

$$\| (\nabla_v T)_q - (\nabla_v T)_p \| < \varepsilon$$

für alle Punkte p, q aus X und alle Vektoren v aus V mit $|v| = 1$. Dann ist

$$| [(\nabla_{v_i} T)_q - (\nabla_{v_i} T)_{q_i}] \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n) | \leq (n-1)!\, \varepsilon\, |v_1| \ldots |v_n|,$$

wo die q, q_i Punkte aus X bedeuten.

Beweis. Zunächst ist nach einer obigen Bemerkung

$$A = | [(\nabla_{v_i} T)_q - (\nabla_{v_i} T)_{q_i}] \,.\, (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_n) | \\ (n-1)!\, |v_1| \ldots |\hat{v}_i| \ldots |v_n| \,.\, \| (\nabla_{v_i} T)_q - (\nabla_{v_i} T)_{q_i} \|.$$

Nach Voraussetzung ist $\| (\nabla_{v_i} T)_q - (\nabla_{v_i} T)_{q_i} \| < \varepsilon\, |v_i|$. Also

$$A \leq (n-1)!\, |v_1| \ldots |\hat{v}_i| \ldots |v_n| \,.\, |v_i|\, \varepsilon = (n-1)!\, \varepsilon\, |v_1| \ldots |v_n|,$$

wie behauptet.

Satz 8. *Seien $v_1, \ldots v_n$ linear unabhängige Vektoren aus V, C die durch die v_i bestimmte orientierte n-Zelle und T ein $(n-1)$-covariantes Tensorfeld über E. Dann ist*

$$_C\!\int \text{rot}\ T = n\ _{\partial C}\!\int T.$$

Beweis. Sei ε eine positive Zahl. Dann gibt es, da die Felder T, ∇T, rot T stetig differenzierbar sind, eine positive Zahl ε', so daß

$$\| T_q - T_p \| < \varepsilon,\ \| (\nabla_v T)_q - (\nabla_v T)_p \| < \varepsilon,\ \| (\text{rot}\ T)_q - (\text{rot}\ T)_p \| < \varepsilon$$

für alle Punkte p, q aus C mit $|p-q| < \varepsilon'$ und alle Vektoren v aus V mit $|v| = 1$.

Seien wieder C_{i0}, C_{i1} derart die zu $(v_1 \ldots \hat{v}_i \ldots v_n)$ parallelen $(n-1)$-Seiten von C, daß C_{i0} den Nullpunkt enthält. Die Orientierung von C_{ij} sei die durch ∂C bestimmte. Wir zerlegen C in m^n Miniaturen D_h von

C mit diam $(D_h) < \varepsilon'$. Für jedes D_h sei D_{hij} die C_{ij} entsprechende Seite. Sei q_h, q_{hij} der Mittelpunkt von D_h bzw. von D_{hij} und $w_i = v_i/m$.

Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$|\, {}_C\!\int \operatorname{rot} T - \Sigma_h (\operatorname{rot} T) \,.\, D_h \,| \leq \varepsilon \operatorname{vol}_r(C). \tag{1}$$

Nach Hilfssatz 3 ist $(\operatorname{rot} T) \,.\, D_h - (nT) \,.\, \Sigma_{ij} D_{hij}$

$$= n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} [(\nabla_{w_i} T)_{q_h} - (\nabla_{w_i} T)_{q_{hi}}] \,.\, (w_1 \wedge \ldots \wedge \hat{w}_1 \wedge \ldots \wedge w_n), \tag{2}$$

wobei q_{hi} ein Punkt auf der Strecke $q_{hi0}\, q_{hi1}$ ist.

Nach Hilfssatz 4 ist

$$[(\nabla_{w_i} T)_{q_h} - (\nabla_{w_i} T)_{q_{hi}}] \,.\, (w_1 \wedge \ldots \wedge \hat{w}_i \wedge \ldots \wedge w_n) \leq (n-1)!\, \varepsilon\, |w_1| \ldots |w_n|. \tag{3}$$

Aus (2), (3) und der Bedeutung der w folgt, daß

$$|\, \Sigma_h (\operatorname{rot} T) \,.\, D_h - \Sigma_{hij} (nT) \,.\, D_{hij} \,| \leq n^2 m^n (n-1)!\, \varepsilon \frac{|v_1|}{m} \ldots \frac{|v_n|}{m}. \tag{4}$$

In dem Ausdrucke $\Sigma_{hij} D_{hij}$ heben sich alle diejenigen D_{hij} gegeneinander auf, die im Innern von C liegen. Also ist

$$|\, \Sigma_{hij} (nT) \,.\, D_{hij} - {}_{\partial C}\!\int nT \,| \leq \varepsilon \operatorname{vol}_{r-1}(\partial C). \tag{5}$$

Aus (1), (4) und (5) folgt der obige Satz.

Wie man aus der fürs Parallelepiped hergeleiteten Stokesschen Relation die entsprechende Relation in beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten beweist, entnimmt man [9].

Literatur

[1] *C. Chevalley*, Theory of Lie groups. Princeton Math. Series 8 (1950).

[2] *A. Duschek*, Vorlesungen über höhere Mathematik 2, 301—350. Wien (1950).

[3] *A. Duschek, A. Hochrainer*, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung 1, 2, 3. Wien (1946, 1950, 1955).

[4] *J. Favard*, Cours de géométrie différentiable locale. Cahiers sci. Paris 24 (1957).

[5] *R. König, K. H. Weise*, Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum IV. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 87, 223—250 (1935).

[6] *J. A. Schouten*, Tensor analysis for physicists. Oxford, 64—74 (1951).

[7] *J. A. Schouten*, Ricci-Calculus. Grundlehren 10, 83—89 (1954).

[8] *A. Weil*, Variétés kählériennes. Act. Sci. Ind. Paris 1267, 11—29 (1958).

[9] *H. Whitney*, Geometric integration theory. Princeton Math. Series 21 (1957).

Buchbesprechungen

Opere. Band I und Band II. Von *E. E. Levi*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. XIX, 418 S. + 448 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1959 und 1960. Brosch. je L. 4500.—.

Trotzdem der Verfasser bereits im Alter von 34 Jahren während des ersten Weltkrieges gefallen ist, konnte er in der kurzen Zeit seines mathematischen Schaffens auf verschiedenen Gebieten Ergebnisse von bleibender Bedeutung erzielen, vor allem bei den Randwertproblemen der partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Es ist daher zu begrüßen, daß nunmehr sämtliche Publikationen *Levi's* (es sind insgesamt 33 aus den Jahren 1905—1915) in zwei Sammelbänden vorliegen und die Orientierung jeweils durch knappe, aber treffende Referate aus der Feder von *M. Picone* sehr erleichtert wird. Die zum Teil umfangreichen Arbeiten sind nach Sachgebieten geordnet und bringen Beiträge zur Differentialgeometrie, Gruppentheorie, Funktionentheorie, Variationsrechnung und vor allem zu den partiellen Differentialgleichungen.

K. Mayrhofer, Wien

Opere. Volume I. Funzioni di variable reale. Von *L. Tonelli*. (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) V, 601 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1960. L. 6000.—.

Der Rührigkeit des Präsidiums der Italienischen Mathematikervereinigung ist es zu verdanken, daß nunmehr auch die Arbeiten von *L. Tonelli* (1885—1946) gesammelt erscheinen können. Dies ist umso wertvoller, als es sich meist um auch heute noch aktuelle Untersuchungen handelt. Es ist geplant, die insgesamt 137 Publikationen auf vier Bände aufzuteilen: der erste Band soll die Beiträge zur Theorie der reellen Funktionen enhalten, der zweite und dritte die Beiträge zur Variationsrechnung und der vierte die restlichen Arbeiten (über trigonometrische Reihen, gewöhnliche Differentialgleichungen, Integralgleichungen, analytische Funktionen und Verschiedenes.) Von diesen vier Bänden ist der erste eben erschienen. Er wird durch einen Bericht über das Leben und die wissenschaftliche Tätigkeit *Tonelli's* durch *S. Cinquini* eingeleitet und bringt sodann 46 Originalarbeiten, die meist grundlegende Fragen der reellen Analysis behandeln, vor allem über den Integralbegriff. Hervorgehoben sei etwa die Publikation „Sulla nozione di Integrale" (1923/4), die eine rasche und mühelose Einführung in das *Lebesgue'sche* Integral darstellt und ohne nähere Vorkenntnisse gelesen werden kann.

K. Mayrhofer, Wien

Größe und Grenze der mathematischen Denkweise. Von *Oskar Becker*. (Studium. Universale) VIII, 174 S. Freiburg—München: Verlag Karl Alber. 1959.

Gerade in der heutigen Zeit, wo es schon schwierig ist, auch nur die Zusammenhänge des eigenen Spezialgebietes mit den unmittelbar benachbarten Wissensgebieten wahrzunehmen, sind Bücher wie dieses zu begrüßen, welche die Stellung und Bedeutung der Mathematik im Rahmen und in der Geschichte der gesamten

Wissenschaften behandeln. Der Verf. ist wie kein anderer berufen, hier zu sprechen und gehört zu werden. Nur wenige Gedanken können hier hervorgehoben werden. So zeigt ein geschichtlicher Rückblick mit Hinwendung zur modernen Physik die merkwürdige Wiederbelebung des uralten pythagoreischen Gedankens von der Harmonie (Symmetrie) als Grundprinzip des Weltalls. Eine kritische Betrachtung des Realitätsbegriffes in den exakten Naturwissenschaften führt u. a. zu den heute heftig diskutierten Begriffen: objektiv, subjektiv, möglich, wahrscheinlich, wirklich.

Sind diesem, in seiner Größe imponierenden mathematischen Denken, das unbekümmert und mühelos alle Schranken des Unendlichen übersteigt, doch Grenzen gesetzt? Freilich mußten manche allzu kühne Argumentationsweisen zurückgenommen werden, aber das hat niemals zur „Resignation, sondern zur Verfeinerung und Vertiefung" geführt. Grenzen können auch aus der Endlichkeit des Menschenwesens sich ergeben. Allerdings dürfte eine ernste Diskussion über die Frage, ob Gott nach *Platon* immer Geometrie treibe, ob er nach *Gauß* stets Arithmetik treibe, oder ob er nach Meinung *Plotins* u. a. überhaupt nicht Mathematik treibe und treiben könne, nicht geeignet sein, eine Grenze für das mathematische Denken, wohl aber eine Verirrung des philosophischen und religiösen Denkens aufzuweisen. Dagegen findet die mathematische Denkweise ihre natürliche Grenze im hermeneutischen (verstehenden) Denken der historischen Geisteswissenschaften. *W. Gröbner*, Innsbruck

Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von *R. Carnap*. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 5 Textabb., XII, 241 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Geb. öS 168.—; DM 28.—; sfr. 28.70; $ 6,65; £ 2/7/6.

Die erste Auflage des Buches ist 1954 erschienen und wurde von *L. Schmetterer* im Band 58 der Monatshefte besprochen. In der vorliegenden Neuauflage sind Inhalt und Aufbau im wesentlichen gleich geblieben, es wurden jedoch verschiedene kleinere Ergänzungen und Verbesserungen vorgenommen. Das originelle Werk wird als Einführung in ein wichtiges Grenzgebiet der Mathematik auch weiterhin gute Dienste leisten. *W. Nöbauer*, Wien

Vektoren und Matrizen. Von *S. Valentiner*. (Sammlung Göschen: Band 354/354a.) Zweite Auflage (9., erweiterte Auflage der „Vektoranalysis"). Mit einem Anhang: Aufgaben zur Vektorrechnung, von *H. König*. Mit 35 Textabb., 202 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Brosch. DM 5,80.

Es handelt sich hier um einen im wesentlichen unveränderten Nachdruck der 1958 erschienenen ersten Auflage, welche im Band 62 der „Monatshefte" besprochen wurde. *W. Nöbauer*, Wien

Algebra. Erster Teil .Von *B. L. van der Waerden*. Unter Benutzung von Vorlesungen von *E. Artin*. und *E. Noether*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 33.) Fünfte Auflage der Modernen Algebra. VIII, 292 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 22.—.

Ich verweise auf die ausführlichen Besprechungen in dieser Zeitschrift, insbesondere **55**, 90 (1951) und **59**, 333 (1955). *N. Hofreiter*, Wien

Grundzüge der Algebra. Teil III: Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen. Von *H. Lugowski* und *H. J. Weinert*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 11.) Mit 5 Textabb., 274 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1960. Geb. DM 13,80.

Dieser dritte Band des Werkes (Besprechung der beiden ersten Bände in Monatsh. Math. **62** bzw. **63**) beginnt mit einem Kapitel über Polynome, in dem auch der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen wird. Das nächste Kapitel behandelt algebraische Körpererweiterungen, das Schlußkapitel die Theorie von *Galois* und ihre Anwendung auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Wie bereits in den früheren Besprechungen festgestellt wurde, ist das nunmehr abgeschlossene Werk wegen seiner breiten Darstellung vor allem für Anfänger geeignet, für die es ja auch gedacht ist. *W. Nöbauer*, Wien

Convegno internazionale di Teoria dei gruppi finiti e applicazioni. *Edito dalla Unione Matematica Italiana.* VII, 156 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1960. Brosch. L. 2500,—.

In diesem Bericht über die gruppentheoretische Tagung, welche vom 11. bis 13. April 1960 in Florenz stattfand, werden 19 von den dort gehaltenen Vorträgen teils vollständig, teils auszugsweise wiedergegeben. Der Band zeigt, daß es auch auf dem Gebiet der endlichen Gruppen und ihrer Anwendungen noch ein weites Feld von interessanten Problemen gibt. *W. Nöbauer*, Wien

An Introduction to Homological Algebra. Von *D. G. Northcott*. XI, 282 S. Cambridge: At the University Press. 1960. Geb. 42/6 net.

Die homologische Algebra ist in den letzten Jahren durch die Einführung von Methoden der algebraischen Topologie in die reine Algebra entstanden; zunächst wurden diese Methoden jeweils auf den speziellen Fall des betrachteten Anwendungsgebietes zugeschnitten; 1956 erschien dann das berühmte Buch von *Cartan* und *Eilenberg*, in dem alle bisherigen homologischen Konstruktionen in algebraischen Strukturen einer einheitlichen Theorie, eben der homologischen Algebra, untergeordnet wurden, und seither hat diese Theorie weitere nützliche Anwendungen gefunden. Dennoch aber dürfte die Zahl der Mathematiker, welche eine gründliche Kenntnis dieses Gebietes besitzen, gegenwärtig noch keineswegs besonders groß sein, was seine Ursache wohl vor allem darin hat, daß das Cartan-Eilenbergsche Buch keineswegs leicht lesbar ist und andere Lehrbücher des Gegenstandes bis jetzt noch nicht vorhanden waren. Das vorliegende Werk, welches einerseits in ausführlicher und gut lesbarer Form in die Grundgedanken der homologischen Algebra einführt, andererseits aber auch einige ihrer wichtigsten Anwendungen bringt, wird deshalb in der mathematischen Welt weite Verbreitung finden.

Es beginnt mit allgemeinen Bemerkungen über Moduln und Tensorprodukte, führt dann die Begriffe Kategorie und Funktor ein und studiert insbesondere Homologiefunktoren. Nach der Untersuchung von projektiven und injektiven Moduln wendet es sich den abgeleiteten Funktoren zu und behandelt als wichtigste Fälle von abgeleiteten Funktoren die Torsions- und Extensionsfunktoren genauer. Hierauf werden Anwendungen dieser Funktoren auf die Dimensionstheorie der Noetherschen Ringe gemacht; die Struktur der kommutativen Noetherschen Ringe von endlichen Globaldimensionen wird eingehend studiert (diese Untersuchungen sind hier erstmalig im Rahmen eines Lehrbuches dargestellt).

Das Schlußkapitel gibt eine Einführung in die Homologie- und Kohomologietheorie von Monoiden (Halbgruppen mit Einslement) und Gruppen.

W. Nöbauer, Wien

Stetigkeit und Irrationalen Zahlen. Von *R. Dedekind*. Sechste, unveränderte. Auflage. 22 S. Braunschweig: Vieweg & Sohn. 1960. Brosch. DM 2,40.

Der Kern dieser kleinen Schrift von größter Bedeutung geht auf den Herbst 1858 zurück, als der Verfasser „empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik fühlte". Die Schrift führt aus, wie dieser Mangel mittels der heute nach dem Verfasser benannten Schnitte beseitigt und zugleich eine präzise Erklärung des bis dahin nur anschaulich gegebenen Begriffes der „Stetigkeit" der reellen Zahlen gegeben werden kann. Wer einen knappen und zugleich mühelosen Aufbau des reellen Zahlensystems von den Rationalzahlen aus kennen lernen will, tut gut, hierzu das vorliegende Heftchen zu wählen.

K. Mayrhofer, Wien

Irrationalzahlen. Von *O. Perron*. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik: Band I.) Vierte, durchgesehene und ergänzte Auflage. VIII, 202 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Geb. DM 28.—.

Die zweite Auflage wurde in dieser Zeitschrift **49, 3** (1941) ausführlich besprochen. Die dritte Auflage war anastatischer Neudruck. Die vierte Auflage bringt eine Reihe von kleineren Änderungen und Ergänzungen.

N. Hofreiter, Wien

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zum Gebrauch bei akademischen Vorträgen sowie zum Selbststudium. 1. Band: Funktionen einer Variablen. Von *A. Ostrowski*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe: Band 4.) Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 47 Testabb., 330 S. Basel—Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 1960. Geb. sfr. 35, —.

Neben einzelnen kleineren Verbesserungen und Erweiterungen wurden in der neuen Auflage die Elemente der Reihenlehre vom ursprünglichen zweiten Band in den vorliegenden ersten herübergenommen und ebenso einige Grundtatsachen der Differentialgeometrie der Kurven in Ebene und Raum. Hierdurch wurde eine größere Abgeschlossenheit des ersten Bandes als einführendes Lehrbuch in die Infinitesimalrechnung erreicht. Dafür wurden die zahlreichen, zum Teil recht wertvollen Übungsaufgaben herausgenommen und einer eigenen Sammlung, die auch die Lösung bringen soll, vorbehalten. Im übrigen sei auf die ausführliche Besprechung der ersten Auflage dieses ausgezeichneten Buches durch *J. Radon* in den „Monatsheften", **52,** (1952), 354/5, hingewiesen.

K. Mayrhofer, Wien

Pure Mathematics. A University and College Course. Band I: Calculus. Band II: Algebra, Trigonometry, Coordinate Geometry. Von *F. Gerrish*. Mit 240 Textabb., XL, 758 (48), S. Cambridge: At the University Press. 1960. Geb. Band I: 25/—, Band II: 35/—.

In diesem Werk wird ein Stoff behandelt, der in Österreich zum Teil schon in der Oberstufe der Mittelschulen gelehrt wird, vor allem aber im ersten Jahr des Hochschulstudiums, etwa in der Vorlesung Mathematik I unserer technischen

Hochschulen. Trotz der durchlaufenden Seitennumerierung kann der zweite Band unabhängig vom ersten benützt werden. Die Darstellung ist sorgfältig durchgearbeitet und auch vom mathematischen Standpunkt aus einwandfrei; zu jedem Abschnitt werden mehrere Beispiele vorgerechnet und zahlreiche, gutgewählte Übungsaufgaben gestellt (mit Angabe der Lösungen am Ende des Bandes). Das Werk ist zwar vor allem dem englischen Unterrichtssystem angepaßt, es kann aber auch, nicht zuletzt wegen der Aufgaben, für die Studenten und Lehrer anderer Länder recht nützlich sein.

Kurze Inhaltsübersicht: Band I behandelt Funktionen, Grenzwerte, Ableitungen von Funktionen und ihre Anwendungen, Integration der verschiedenen Typen von Funktionen, Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, den Satz von Taylor und Anwendungen davon, die Summendefinition des bestimmten Integrals, geometrische und physikalische Anwendungen des bestimmten Integrals, Differentation von Funktionen mehrerer Variabler. Band II behandelt Polynome, Determinanten und lineare Gleichungssysteme von höchstens vierter Ordnung, unendliche Reihen, die komplexen Zahlen, Auflösung von algebraischen Gleichungen, analytische Geometrie der Ebene, die Kegelschnitte (auch in allgemeiner Lage und in Polarformdarstellung), analytische Goemetrie des Raumes (nur Gerade und Ebenen), spärische Trigonometrie. *W. Nöbauer*, Wien

Mathématiques générales. Von *Ch. Pisot* und *M. Zamansky*. (Collection universitaire de mathématiques: Band 4.) XXIV, 648 S. Paris: Dunod 1959.

Das Werk ist eine von Grund auf beginnende Einführung in die lineare Algebra und die Analysis und steht in Stil und Aufbau unverkennbar unter dem Einfluß von *Bourbaki*. Es wird also immer zunächst möglichst große Allgemeinheit angestrebt und dann allmählich spezialisiert, wobei auf logisch vollkommen einwandfreies Vorgehen großer Wert gelegt wird. Diese Methode hat bei einem Lehrbuch den Vorteil, daß der Student (zumindest theoretisch) keinerlei Vorkentnisse benötigt und sich vom Anfang an an die abstrakte Denkweise der modernen Mathematik gewöhnt; allerdings besteht dabei die Gefahr, daß er die wesentlichen Gedanken vom formalen Beiwerk nicht richtig unterscheiden kann und so den Wald vor lauter Bäumen nicht sieht; außerdem ist mit dieser Methode meist eine Vernachlässigung des formalen Rechentrainings verbunden, was sich auch hier an der geringen Zahl der durchgerechneten Musterbeispiele zeigt. Das Buch dürfte also doch wohl nur für einigermaßen vorgebildete Studenten geeignet sein; für diese wird es allerdings von großem Wert sein.

In methodischer Hinsicht weichen die Verfasser an vielen Stellen von den in Einführungen üblichen Wegen ab; so werden z. B. die reellen Zahlen mit Hilfe des Ideals als Nullfolgen im Ring der Fundamentalfolgen konstruiert, das Integral wird zunächst für Treppenfunktionen eingeführt und dann für gleichmäßige Grenzwerte aus Folgen solcher Funktionen erklärt, die Rektifizierbarkeit wird für beliebige Jordan-Kurven definiert und untersucht. Das Buch wird daher auch dem erfahrenen Hochschullehrer noch manche wertvolle Anregung geben können.

Nachstehend eine kurze Inhaltsübersicht: Der erste Teil (allgemeine Begriffe) beschäftigt sich mit dem Funktions- und Abbildungsbegriff und dem Begriff der zweistelligen Relation und Operation. Der zweite Teil (Algebra) beginnt mit dem Bereich der natürlichen Zahlen und erweitert ihn zum Bereich der rationalen Zahlen, dann werden die wichtigsten algebraischen Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume) besprochen; die nächsten Kapitel behandeln Polynome, die komplexen Zahlen, die rationalen Funktionen, lineare Abbildungen von Vektorräumen, Matrizen, Determinanten, euklidische Vektorräume, Reduktions-

theorie der Matrizen und quadratische Formen. Der dritte Teil (Analysis) beginnt mit dem topologischen Studium der reellen Zahlen, dann werden die allgemeinen Eigenschaften reeller Funktionen einer Variablen auseinandergesetzt und differenzierbare Funktionen studiert; nach einem Kapitel über Integration werden Vektorfunktionen von einer reellen Variablen und skalare sowie vektorielle Funktionen von mehreren reellen Variablen eingehend untersucht, worauf die Theorie der Kurvenintegrale und Doppelintegrale entwickelt wird (dreifache Integrale werden nur kurz und ohne Beweise behandelt). Der vierte Teil beschäftigt sich mit den Teilen der Analysis, die für praktische Anwendungen besonders wichtig sind, und mit numerischen Methoden; vor allem findet man hier die Technik der Integration, eine Besprechung der elementaren Funktionen, Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen sowie ein Kapitel über Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. *W. Nöbauer*, Wien

Combinatorial Analysis. Proceedings of the Tenth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, held at Columbia University April 24—26, 1958. Herausgegeben von *R. Bellman* und *M. Hall, Jr.* (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Band X.) VI, 311 S. Providence, R. I.: American Mathematical Society. 1960. Geb. $ 7,70.

Das Buch enthält 24 Arbeiten, die bei der im Titel erwähnten Tagung vorgetragen wurden. Die Vielseitigkeit und Vielgestaltigkeit dessen, was kombinatorische Analysis heißt, kommt sehr gut zur Geltung und es werden interessante Zusammenhänge zwischen scheinbar ganz verschiedenen Aussagen hergestellt. Laut Vorwort ist das Buch, entsprechend den vier Sessionen des Symposiums, in die folgenden vier Abschnitte gegliedert: I. Existenz und Konstruktion kombinatorischer Strukturen, II. Kombinatorische Untersuchungen diskreter Extremwertaufgaben, III. Kommunikations-, Transport- und logische Probleme, IV. Numerische Analysis diskreter Probleme; doch kommt diese Einteilung bei der ansonsten erstklassigen Drucklegung typographisch nicht zum Ausdruck. Die einzelnen Arbeiten werden durch Literaturangaben, der ganze Band auch durch ein Sachverzeichnis vorteilhaft ergänzt. Diskussionsbeiträge werden nicht gegeben. *H. Izbicki*, Wien

Cluster Sets. Von *K. Noshiro.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 28. Reihe: Moderne Funktionstheorie.) VIII, 135 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Brosch. DM 36,—.

Die Menge der Zielwerte einer in einem Gebiet meromorphen Funktion in einem Randpunkt (cluster set) wurde schon von *Groß* und *Iversen* verwendet und untersucht; weitere Arbeiten von *Seidel*, *Doob*, *Cartwright* u. a. gaben dann den Anstoß zu einer ziemlich ausgedehnten Theorie dieser Mengen, die hier zusammenfassend dargestellt wird; ein Anhang gilt der Ausdehnung auf quasikonforme Abbildungen. *H. Hornich*, Wien

Norm Ideals of Completely Continuous Operators. Von *R. Schatten.* (Ergebnisse(der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 27. Reihe: Reelle Funktionen.) VIII, 81 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Brosch. DM 23,60.

Dieses Ergebnisheft beschäftigt sich mit Räumen von vollstetigen Operatoren eines komplexen Hilbert-Raumes. Mit deren Untersuchung steht in Zusammen-

hang der Begriff des Normideals: Ein Normideal ist ein Ideal in der Algebra aller Operatoren des Hilbert-Raumes, auf welchem sich eine Norm mit gewissen Eigenschaften definieren läßt, bezüglich derer das Ideal vollständig ist; es werden verschiedene Sätze über diese Normideale bewiesen und einige Räume aus vollstetigen Operatoren bzw. die konjugierten Räume solcher Räume näher studiert.

Das Büchlein vermittelt einen guten Überblick über ein bisher relativ wenig bearbeitetes Gebiet, man darf daher erwarten, daß es wertvolle Anregungen zu weiteren Untersuchungen geben wird.

W. Nöbauer, Wien

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel.* (Sammlung Göschen: Band 920.) Sechste, neubearbeitete und erweiterte Auflage. 128 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Brosch. DM 3,60.

Partielle Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel.* (Sammlung Göschen: Band 1003.) Vierte, durchgesehene Auflage. 128 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Brosch. DM 3,60.

Mit Rücksicht auf die minimalen Änderungen verweise ich auf die Besprechungen früherer Auflagen in dieser Zeitschrift, insbesondere **56,** 81 (1952) und **59,** 154 (1955).

N. Hofreiter, Wien

Differential Equations for Engineers. (Formerly Titled: Differential Equations for Electrical Engineers.) Von *Ph. Franklin.* Unveränderter Neudruck der ersten Auflage, 1933. Mit 41 Textabb., VII, 299 S. New York: Dover Publications. 1960. $ 1,65.

Das vorliegende Werk ist zuerst 1933 erschienen und ist vor allem für Studenten der Technik bestimmt. Es enthält Abschnitte über Funktionentheorie, Fouriersche Reihen, gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und partiellen Differentialgleichungen, vor allem Differentialgleichungen aus der Physik. Ein Abschlußkapitel beschäftigt sich mit der Konvergenz der Fourierschen Reihen. Das Buch ist gerade als Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen brauchbar. Das zeigt schon die Tatsache, daß es in den Dover Books aufgenommen wurde. *E. Hlawka*, Wien

Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations. Von *G. E. Forsythe.* und *W. R. Wasow.* (Applied Mathematics Series.) Mit 40 Textabb., X, 444 S. New York: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 11,50.

Die Methode der endlichen Differenzen ist nicht nur die wirkungsvollste Methode bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen, sie gibt auch einen Einblick in die „Mechanik", nach der sich die Lösungen der betreffenden Gleichung aufbauen lassen. Trotz der Einfachheit des Grundgedankens — Ersetzung von Differentialquotienten durch Differenzenquotienten — gibt es eine große Zahl von Abwandlungen des Verfahrens und es muß für jede Gleichung überlegt werden, wie man zu ihrer Lösung vorgehen will. Das vorliegende Buch gibt einen ausgezeichneten Überblick über alle diese Verfahren. Es werden die hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Gleichungen in zwei Variablen behandelt und auch Anfangswertprobleme für gewisse Gleichungen in mehr als zwei Variablen. Bei einer großen Zahl von auftretenden Problemen werden die

physikalischen Fragestellungen erwähnt, die auf die betreffende Gleichung führen. Es werden die Algorithmen für die Lösung untersucht, Stabilitätsfragen erörtert, Fehlergrenzen z. B. bei der Berechnung von Eigenwerten angegeben und anderes mehr. Die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen wird nicht vorausgesetzt, sondern jeweils kurz zusammengestellt und an Beispielen illustriert. Auch die zweckmäßige Durchführung der Rechnungen auf elektronischen Maschinen wird besprochen. Ein Literaturverzeichnis mit vielen hundert Zitaten ergänzt die Ausführungen im Text. — Man wird kaum ein gründlicheres und reichhaltigeres Werk über diesen Gegenstand finden, welches außerdem noch so gut verständlich geschrieben ist. *K. Prachar*, Wien

Special Functions. Von *E. D. Rainville*. Mit 12 Textabb., XII, 365 S. New York: The Macmillan Co. 1960. Geb. $ 11,75.

Dies ist eine Einführung in die Theorie verschiedener Klassen spezieller Funktionen. Obwohl vielerlei Dinge verarbeitet wurden, ist der Stoff doch sehr übersichtlich angeordnet. Die Darstellung verliert sich niemals in zu spezielle Untersuchungen, bringt aber doch auch verschiedenes, das in ähnlichen Büchern vielleicht nicht zu finden ist, z. B. verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen. Zahlreiche interessante Übungsaufgaben ergänzen den Text. Inhalt: Unendliche Produkte. Die Gamma- und Betafunktion. Asymptotische Reihen. Die hypergeometrische Funktion. Verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen. Besselfunktionen. Die konfluente hypergeometrische Funktion. Erzeugende Funktionen. Orthogonale Polynome. Legendresche Polynome. Hermitesche Polynome. Laguerresche Polynome. Die Scheffersche Klassifikation und Verwandtes. Rekursionsformeln. Symbolische Formeln. Jacobische Polynome. Ultrasphärische und Gegenbauersche Polynome. Andere Polynomklassen. Elliptische Funktionen. Thetafunktionen. Jacobische elliptische Funktionen. — Ein gut lesbares und anregendes Werk für den „reinen" und „angewandten" Mathematiker, der sich für formale Theorie spezieller Funktionen interessiert.

K. Prachar, Wien

The Applications of Elliptic Functions. Von *A. G. Greenhill*. Unveränderter Neudruck des 1892 erschienenen Buches .Mit 27 Textabb., XI, 357 S. New York: Dover Publications. 1959. $ 1,75.

Dieses klassische Buch ist zuerst 1892 erschienen und es ist sehr zu begrüßen, daß es in der Dover Publication aufgenommen wurde. Es ist für jemanden, der die elliptischen Funktionen in Physik und Technik anzuwenden hat, fast unentbehrlich. *E. Hlawka*, Wien

Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Von *W. Gröbner*. (Mathematische Monographien, Band 3.) Mit 5 Textabb., VI, 112 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Geb. DM 22,—.

Die mit dem Namen Lie-Reihen bezeichneten Reihen gehen auf grundsätzliche Begriffsbildungen von *Sophus Lie* zurück, wurden aber von *Lie* selbst nur am Rande vermerkt. Erst einem glücklichen Griff des Verfassers blieb es vorbehalten, die Anwendungsmöglichkeiten dieser Lie-Reihen, die vor allem in der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme liegen, zu erkennen und in diesem Buch zu bearbeiten.

Die Monographie gliedert sich in fünf Teile: Im ersten Kapitel werden zunächst die Lie-Reihen mit Hilfe linearer Differentialoperatoren definiert; die

folgenden allgemeinen Konvergenzuntersuchungen dieser Reihen, die mit der Methode der Cauchyschen Majoranten geführt werden, sind von besonderem Interesse; wird doch in ihnen einmal die Cauchysche Majorantenmethode konsequent auf Potenzreihen mit mehreren Variablen angewandt. Es folgen die Eigenschaften der Lie-Reihen, von denen die wichtigste der Vertauschungssatz für holomorphe Funktionen ausdrückt: das Funktionszeichen holomorpher Funktionen darf mit dem Reihensymbol vertauscht werden. Ähnliche Vertauschungssätze gelten bekanntlich bei den Taylorschen und Lagrangeschen Reihen, die sich sinngemäß als Sonderfälle der Lie-Reihen auffassen lassen. Das erste Kapitel beschließen einige Untersuchungen über die analytische Fortsetzung und über mehrdimensionale Lie-Reihen.

Im zweiten Kapitel werden die Lie-Reihen unter Anwendung des Vertauschungssatzes zur Lösung autonomer und nicht autonomer Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung herangezogen. Im dritten Kapitel erfolgt die Umkehrung eines analytischen Funktionssystems, die an die Ergebnisse des vorangehenden Kapitels anknüpft, und die Konstruktion von Charakteristiken.

Das vierte Kapitel ist dem n-Körperproblem gewidmet, dessen Lösungen sich mit Hilfe der Lie-Reihen besonders elegant darstellen lassen. Die Bearbeitung des Zweikörperproblems und der Störungsrechnung wird besonders ausführlich durchgeführt. Im letzten Kapitel werden kurz die Anwendungen der Lie-Reihen in der algebraischen Geometrie besprochen; einerseits zur Parameterdarstellung von algebraischen Mannigfaltigkeiten, andererseits bei Abelschen Integralen und deren Umkehrfunktionen.

Besonders die beiden letzten Kapitel können keineswegs als abgeschlossen betrachtet werden, so daß in einer Neuauflage viele neue Forschungsergebnisse des Verfassers zu erwarten sind. *P. Lesky*, Innsbruck

Darstellende Geometrie. 1. bis 5. Lehrbrief. Von *W. Schmid*, für das Fernstudium bearbeitet von *W. Enzmann* und *A. Neumann*. (Freiberger Lehrbriefe). Mit 60+46+30+42+27 Textabb., 56+46+42+61+62 S. Freiberg (Sachs.): Bergakademie, Hauptabteilung Fernstudium. 1957—1960. Brosch. je DM 2.—

Es handelt sich um eine für die Bedürfnisse des Fernstudiums abgefaßte Darstellung des klassischen Stoffgebietes der Darstellenden Geometrie unter Beschränkung auf mehr elementare Problemstellungen. Eingestreute Fragen, die jeweils am Schluß eines Einzelheftes beantwortet sind, sollen die Mitarbeit des Lesers fördern. Interessanterweise werden in zugeordneten Normalrissen fast durchwegs Spuren verwendet. *H. Brauner*, Stuttgart

Analytische Geometrie der Ebene. Einführung und Übungen. Von *H. Dietze* und *A. Haendel*. (Mathematischer Vorkurs). Mit 85 Textabb., 155 S. Freiberg (Sachs.): Bergakademie, Hauptabteilung Fernstudium. 1960. Geb. DM 5,80.

In sieben Kapiteln werden die Gleichungen der geraden Linie und der Kegelschnitte sowie ihrer Tangenten behandelt. Die Verfasser sind bemüht, das Stoffgebiet ausführlich darzulegen. Zu den 130 Übungsaufgaben sind auf rund 60 Seiten Anleitungen, Hinweise, Zwischenrechnungen und Lösungen angegeben. Leider hat das Buch in dieser Fassung zahlreiche unklare Formulierungen, die vor allem den Studenten, die sich durch ein Fernstudium ihre Kenntnisse erwerben wollen, große Schwierigkeiten bereiten werden. Die zeichnerische Darstellung wäre zu verbessern. *J. Laub*, Wien

Introduction to Analytic Geometry and Linear Algebra. Von *A. Jaeger*. Mit 160 Textabb., XII, 305 S. New York: Holt, Rinehart and Winston. 1960. Geb. $ 5,50.

Der Autor hat in Göttingen studiert und ist durch seine Arbeiten zur abstrakten Algebra bekannt. Entsprechend diesem Interesse wird das abstrakte algebraische Denken bevorzugt. Gruppen, Isomorphismen und Vektorräume sind die grundlegenden Begriffe, mit denen gearbeitet wird. Analytische Geometrie ist für den Autor im wesentlichen nur ein Anwendungsgebiet der linearen Algebra. Rein geometrische Dinge wie Konstruktionen fehlen fast ganz. Die abstrakten Überlegungen ermöglichen eine Interpretation im n-dimensionalen Raum. Abgesehen von der linearen Algebra bringt das Buch wie üblich die linearen und quadratischen Mannigfaltigkeiten aus der analytischen Geometrie. Zum erstenmal in einem Buch über Algebra und analytische Geometrie sind Abschnitte über positive Lösungen von linearen Gleichungssystemen und lineare Programme enthalten. Am Ende jedes Kapitels werden zahlreiche Aufgaben gestellt, die vielfach Beweise sind. Zu Seite 256 sei bemerkt: Jede Parallele zu einer Asymptote hat mit der Hyperbel nur einen Punkt gemein und ist doch keine Tangente.

N. Hofreiter, Wien

Differentialgeometrie. (Mathematische Leitfäden). Von *D. Laugwitz*. Mit 44 Textabb., 183 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1960. Geb. DM 24,60.

Im Gegensatz zu anderen modernen Darstellungen der Differentialgeometrie, an denen wahrhaftig kein Mangel herrscht, ist das vorliegende Buch nicht nur als Lehrbuch, sondern mehr als Leitfaden aufzufassen, der einen systematisch geordneten Aufbau der Differentialgeometrie mit Einschluß der Riemannschen Geometrie unter Benützung des Tensorkalküls bietet. Während an vielen Stellen in methodischer Hinsicht neue Wege beschritten werden — so wird etwa terminologisch stets zwischen „lokalen", „infinitesimalen" und „punktalen" Eigenschaften einer differentierbaren Mannigfaltigkeit unterscheiden —, geht die Darstellung vor allem an zwei Punkten über die sonst üblichen Fragestellungen hinaus. Die eine Stelle betrifft die Übersicht über die verschiedenen Raumstrukturen und die Auszeichnung der Riemannschen Geometrie innerhalb der Finslergeometrie, wobei im Zusammenhang mit dem Weylschen Raumproblem eine auf Arbeiten des Autors zurückgehende Darstellung gewählt wird, die bisher in keinem Lehrbuch aufscheint. Die zweite Stelle, an der auffallend von der üblichen Behandlung des Stoffgebietes abgewichen wird, bezieht sich auf globale Fragen. Hier wird versucht, eine gewisse Systematik einzuführen, was durch die weitgehende Verwendung der Herglotzschen Integralformelmethode erleichtert wird. Dabei wird mehr als in anderen Abschnitten moderne Originalliteratur zitiert und aktuelle Forschungsergebnisse vor allem von *Rembs* und *Grotemeyer* dargestellt. Von Letztgenanntem stammt auch die elegante Ableitung der Gauß-Bonnetschen Formel.

Zusammenfassend liegt hier eine interessante Neuerscheinung vor, die stets die Persönlichkeit des Autors fühlen läßt und auch dem Kenner viele neue Gesichtspunkte und Anregungen vorschlägt. Die 44 durchwegs guten Textabbildungen und die präzise Sprache, die bei aller mathematischen Strenge doch nie das geometrische Anliegen aus dem Auge verliert, gestalten die Lektüre dieses ansprechenden Buches zu einem wirklichen Genuß.

H. Brauner, Stuttgart

Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume. Von *D. A. Kappos*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete: Neue Folge, Heft 24.)

IV, 136 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Steif geheftet. DM 21.80.

Das Grundthema des Bandes ist die Frage, über welchen Booleschen Algebren beschränkte nicht negative Maße definiert werden können. Diese Aufgabenstellung ist, wie der Verfasser betont, besonders für die Wahrscheinlichkeitstheorie von großer Bedeutung. Unter einem Wahrscheinlichkeitsraum versteht der Autor dasselbe wie *Kolmogorov* in seinem grundlegenden Ergebnisband unter einem Wahrscheinlichkeitsfeld. Hingegen bezeichnet in dem vorliegenden Band ein Wahrscheinlichkeitsfeld ein über einer abstrakten Booleschen Algebra definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Begriffe Wahrscheinlichkeitsraum und Wahrscheinlichkeitsfeld stehen natürlich in engster Relation zueinander. Die beiden grundlegenden Darstellungssätze, welche diese Verbindung herstellen, der Satz von *Stone* und der Satz von *Loomis*, werden im ersten bzw. dritten Kapitel dargestellt. Der Satz von *Loomis* wird nach einer Idee von *Aumann* bewiesen. Im 1. Kapitel werden nur Boolesche Ringe oder Algebren betrachtet, erst das 2. Kapitel führt σ-Ringe und demgemäß die Totaladditivität von Maßen ein. Das 4. 5. und 6. Kapitel stehen theoretisch in enger Berührung. Es handelt sich zunächst um Maße auf carthesischen Produkten und dann um die Betrachtung einer Reihe von Unabhängigkeitsbegriffen. Diese Kapitel enthalten, wie mir scheint, besonders wichtige Sätze: Erstens die Ergebnisse von *Maharan* über homogene Maße, die definitionsgemäß über Booleschen σ-Algebren erklärt sind, für welche die Mächtigkeit jedes Hauptideals mit der Mächtigkeit einer σ-Basis übereinstimmt und zweitens die Resultate von *Kakutani* und *Oxtoby* über die nicht separablen invarianten Erweiterungen des (über einem Einheitsintervall definierten) Lebesgueschen Maßes. Das 7. Kapitel betrachtet topologische Wahrscheinlichkeitsräume, insbesondere kompakte und quasikompakte Räume, wobei sich die letzteren als äquivalent mit den von *Gnedenko* und *Kolmogorov* eingeführten perfekten Wahrscheinlichkeitsräumen erweisen. Eine Sonderstellung nimmt das letzte und 8. Kapitel ein, das von der Struktur der bedingten Wahrscheinlichkeitsräume handelt, wie sie von *Renyi* axiomatisch eingeführt wurden. Im Anhang kann sich der Leser über einige einschlägige Begriffe der Verbandstheorie orientieren.

Einige Anmerkungen zu dieser erfreulichen Neuerscheinung, die weniger als Kritik, sondern als Desiderata angesehen werden sollen und vielfach auf eine Geschmacksfrage hinauslaufen, seien zum Schluß gestattet: Zunächst ist nicht einzusehen, warum die teilweise parallele Behandlung der beiden Begriffe Wahrscheinlichkeitsfeld und Wahrscheinlichkeitsraum notwendig war. Weiter schiene mir eine etwas weitergehende Fassung des Kapitels über bedingte Wahrscheinlichkeiten wünschenswert. Ein Teil der Problematik kommt nicht zum Ausdruck. Schließlich sei noch angemerkt, daß das Literaturverzeichnis etwas knapp geraten ist. So fehlen z. B. eine (ausdrückliche) Erwähnung der Untersuchungen von *Doob* zur Theorie der perfekten Wahrscheinlichkeitsräume und ebenso der interessanten Arbeit von *Blackwell*, die demselben Ideenkreis angehört.

L. Schmetterer, Hamburg

Introduktion to Probability and Random Variables. Von *G. P. Wadsworth* und *J. G. Bryan*. (McGraw-Hill Series in Probability and Statistics.) Mit 82 Textabb., VII, 292 S. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Co. 1960. Geb. 68 s.

Das Buch ist ein einführendes Lehrbuch in die Wahrscheinlichkeitstheorie mit Anwendung auf mathematische Statistik. Es ist für Studierende geschrieben und eignet sich auch zum Selbststudium für solche, die einige Kenntnisse aus der

Differential- und Integralrechnung besitzen. Dementsprechend ist die Darstellung breit und zahlreiche Beispiele dienen zum besseren Verständnis und zum Üben. Sie sind vielfach aus der Praxis entnommen und lassen die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitstheorie für die Anwendungen, insbesondere für die Statistik erkennen. Das Buch gibt den Studierenden eine feste Grundlage und ist insbesondere jenen zu empfehlen, die nachher mathematische Statistik oder Unternehmensforschung studieren wollen. Nun folgt ein kurzer Inhaltsbericht: Grundlegende Begriffe und Regeln, diskrete zufällige Variable (Binomialverteilung, Poissonverteilung), stetige zufällige Variable (Γ-Verteilung, B-Verteilung, Normalverteilung), mehrdimensionale Verteilungen, Mittelwerte, Streuungen, allgemeine mathematische Erwartung, statistische Prüfungsverfahren, insbesondere χ^2-, t-, F-Teste, Konfidenzbereiche, zentrales Grenzwerttheorem unter einschränkenden Voraussetzungen. — Manches wird in dem Buch gründlicher dargestellt als in den anderen einführenden Lehrbüchern in die Wahrscheinlichkeitstheorie.

N. Hofreiter, Wien

Introduction to Probability and Statistics. Von *H. L. Adler* and *E. B. Roessler*. (A Series of Undergraduate Books in Mathematics.) Mit 52 Textabb., von *E. L. Gillespie*, XI, 252 S. San Francisco—London: W. H. Freeman and Co. 1960. Geb. $ 3,50.

Da heute die Statistik auf vielen Gebieten (Biologie, Physik, Sozialwissenschaften, Ökonometrie, Medizin, Landwirtschaft, Industrie und Technik) eine große Rolle spielt, so sind einführende Lehrbücher notwendig, deren Leser nur geringe mathematische Kenntnisse besitzen. Manches aus der Mathematik wird entwickelt, doch bleiben tieferliegende Dinge unberücksichtigt. Daher können auch manche Beweise nicht geführt werden. Die Autoren bemühen sich mit großem Erfolg, den Lesern eine gut verständliche Einführung in die Statistik zu geben und sie zur Lösung zahlreicher, der Praxis entnommenen Beispiele, anzuleiten. Das Buch bringt die Darstellung des statistischen Materials durch Tabellen und Graphen, die charakteristischen Größen, Binomial- und Normalverteilung, Stichprobenverteilungen, statistische Prüfverfahren, Konfidenzintervalle, t-Verteilung, χ^2 -Verteilung, Regression und Korrelation, Indexzahlen und Zeitreihen.

N. Hofreiter, Wien

Statistics Manual. With Examples Taken From Ordnance Development. Von *E. L. Crow*, *F. A. Davis*, and *M. W. Maxfield*. Unveränderter Neudruck des Navord Report 3369 — Nots 948, U. S. Naval Ordnance Test Station. Mit 38 Textabb., 21 Tafeln und 11 Diagrammen im Anhang, XVII, 288 S. New York: Dover Publications. 1960. $ 1,55.

Während die meisten Dover-Publications unveränderte Neudrucke alter bewährter Bücher sind, liegt hier ein statistisches Handbuch vor, das erst in den letzten 10 Jahren vorbereitet wurde. Es bringt klassische und moderne Methoden für statistische Untersuchungen. Die Methoden werden nicht bloß angegeben, sondern dem Leser verständlich gemacht. Freilich soll dieser bereits Kenntnisse aus der mathematischen Statistik haben, da das Buch kein Lehrbuch ist. Um es dem Leser leichter zu machen, werden die grundlegenden Begriffe und Sätze im 1. Kapitel erörtert und in den folgenden Kapiteln, die den Methoden vorbehalten sind, werden zahlreiche Beispiele gebracht. Die Methoden bringen Prüfen von Mittelwerten und Streuungen, Aufstellung von Konfidenzintervallen, Prüfen mit

Hilfe von Stichproben, welcher Art die Grundgesamtheit ist, Planen und Versuchen, Varianzanalyse, Regression und Korrelation, Ausgleichskurven, Qualitätskontrolle, Sequentialanalyse. Der Anhang enthält zahlreiche Tafeln.

N. Hofreiter, Wien

Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering. Von *K. A. Brownlee*. XV, 570 S. New York—London: John Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 16,75.

Das Buch ist in erster Linie für Studenten geschrieben, deren Vorkenntnisse aus Mathematik gering sein können. Sie sollen die Methoden der mathematischen Statistik kennen lernen, die in Industrie und Technik angewandt werden. Die Methoden werden nicht bloß in Form von Anweisungen gegeben, sondern ausführlich erklärt. Die Leser lernen die statistischen Methoden wirklich verstehen und erhalten genügend Praxis, um die statistischen Methoden bei aktuellen Problemen anwenden zu können. Das Buch nimmt daher eine Mittelstellung zwischen Praxis und reiner Theorie ein. Die ersten 2 Kapitel bringen grundlegende Begriffe und Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik. Die weiteren Kapitel beeinhalten eine Fülle von Prüfverfahren. Besonders ausführlich werden Regressionen und Varianzanalyse behandelt.

N. Hofreiter, Wien

Sample Design in Business Research. Von *W. E. Deming*. XX, 517 S. New York—. London: John Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 12,—.

Hat jemand nur theoretische Kenntnisse aus der Statistik, so kann er damit in der Praxis nicht viel anfangen. Der Statistiker soll auch Praxis haben. Der Autor blickt auf eine jahrelange Erfahrung als Statistiker in verschiedenen hohen Stellungen zurück. Er ist in besonderem Maße berufen, ein Lehrbuch über die Durchführung von Stichproben zu schreiben. Die Darstellung ist breit und mit vielen Beispielen aus der Erfahrung versehen. Der mathematische Inhalt ist ganz gering.

N. Hofreiter, Wien

Statistische Methoden der Populationsgenetik. Ein Grundriß für Genetiker, Agronomen und Biomathematiker. Von *H. L. Le Roy*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Reihe der experimentellen Biologie: Band 15.) Mit 65 Textabb., 397 S. Basel—Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 1960. Geb. sfr. 67.50 (DM 67,50).

Mit Recht betont der Autor, daß objektive Analysenmethoden vielleicht in keinem anderen Wissensgebiet so wichtig sind und so dringend benötigt werden, wie in der Genetik. In keinem anderen Anwendungsgebiet statistischer Methoden ist es aber vielleicht auch so schwierig zu entscheiden, welche Hypothesen man für die statistische Arbeit zugrunde legen soll. Das vorliegende Buch beschäftigt sich aber nicht so sehr mit dieser Frage, sondern soll dem Leser das Handwerkszeug für die Behandlung möglichst vieler statistischer Modelle von genetischen Vorgängen vermitteln. Eine gewisse Vertrautheit mit den grundlegenden Verfahren der mathematischen Statistik muß dabei vorausgesetzt werden, jedoch werden diese gelegentlich kurz wiederholt und übersichtlich zusammengestellt. Das Werk zerfällt in vier Hauptteile: Die Merkmalsprägung. Die Gen- und Umwelteffekte als Korrelationsfaktoren. Die Varianzanalyse als Grundlage für die Schätzung der Gen- und Umweltwirkung. Die künstliche Selektion. Wir können

im einzelnen nicht auf die Vielfalt der hier behandelten Methoden eingehen, wollen jodoch z. B. nur auf das Kapitel über Varianzanalyse hinweisen, in dem der Praktiker genau sehen kann, was die Varianzanalyse für die Genetik leistet. In dem Kapitel über die künstliche Selektion findet sich auch die Theorie verschiedener neuer Zuchtverfahren. Ein außerordentlich reichhaltiges Literaturverzeichnis ergänzt die praktischen Beispiele im Text. — Der Autor hat hier ein Werk geschaffen, das für jeden unentbehrlich sein wird, der sich für die Anwendung statistischer Methoden in der Genetik interessiert und vielleicht auch dem theoretischen Statistiker zeigt, wie viel bei den Anwendungen der Statistik noch zu tun ist.

K. Prachar, Wien

Linear Programming in Industry. Theory and Applications. Von *Sven Danö*. Mit 6 Textabb., VIII, 120 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Geb. S 120.—, DM 20.—, sfr. 20.50, $ 4.75, £ 1/14/—.

Der Ausdruck „lineares Programm" hat zwei ganz verschiedene Bedeutungen. Zunächst versteht man unter einem linearen oder gestreckten Programm eine gewisse Klasse von Programmierungen von elektronischen Rechenanlagen, dann — und das ist in dem Buch der Fall — sind lineare Programme oder lineare Planungen ein neues Teilgebiet der Unternehmensforschung. Es handelt sich — mathematisch formuliert — um Aufgaben folgender Art: Es wird für eine lineare Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein optimaler Wert gesucht, wobei die Variablen Systeme von linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen befriedigen sollen. Die gesuchten Extrema sind Grenzextrema, können also nicht mit den Methoden der Differentialrechnung (Methode von Lagrange) ermittelt werden. Es wurden neue Methoden ersonnen, von denen die Simplex-Methode die allgemeinste und am meisten benutzte ist. Lineare Programme treten bei vielen praktischen Planungsaufgaben in der industriellen Produktion auf. Zu den ältesten Aufgaben (schon 10 bis 15 Jahre) der linearen Programme gehören das Ernährungsproblem das Transportproblem, das Zuweisungsproblem und das Warenhausproblem. Alle diese Aufgaben lassen sich grundsätzlich mit der Simplex-Methode lösen, doch werden für das Zuweisungsproblem und das Transportproblem, die lineare Programme spezieller Art sind, besondere Methoden verwendet. Das Buch stellt die mathematische Theorie der linearen Programme in einfacher Weise dar, legt aber das Hauptgewicht auf eine große Anzahl industrieller Anwendungen. Daher wird auch der Lesekreis ein sehr umfangreicher sein und von Mathematikern, Physikern, Chemikern und Ingenieuren zu Soziologen und Wirtschaftsführern reichen.

N. Hofreiter, Wien

Introduction to Linear Programming. Von *W. W. Garvin*. Mit 74 Textabb. XIV, 281 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. 1960. Geb. 68 s.

Dank der großen praktischen Bedeutung, die lineare Programme besitzen, ist darüber eine sehr große Anzahl von Arbeiten in den letzten 10 Jahren geschrieben worden, die in weitverstreuten wirtschaftswissenschaftlichen Zeitschriften erschienen sind. Kapitel über lineare Programme enthalten auch einige Bücher über Unternehmensforschung und einige Lehrbücher sind ganz den linearen Programmen gewidmet. Unter allen bisher erschienenen Büchern über lineare Programme ist das vorliegende sowohl dem Inhalt wie dem Umfang nach derzeit das Standardwerk. Wer lineare Programme gründlich kennen lernen will, der studiere dieses Buch. Der Leser braucht nur geringe mathematische Kenntnise zu besitzen. In ausführlicher und exakter Weise wird die mathematische Theorie dargestellt

und an vielen Beispielen wird die hohe praktische Bedeutung illustriert. Mögen sich auch manche Planungsaufgaben auf intuitive Art lösen lassen und mathematische Theorie nicht erfordern, in der Industrie treten heute Probleme auf, die nicht mit Fingerspitzengefühl und Kenntnissen einer reichen Erfahrung gelöst werden können. Lineare Programme sind gewiß keine Allheilmittel in der Unternehmensforschung, haben aber speziell bei Transportproblemen die jährlichen Ausgaben um Millionen vermindert. Das Buch enthält vieles über lineare Programme, das bisher in Lehrbüchern nicht oder kaum zu finden war. Ich nenne etwa das verallgemeinerte Transportproblem, lineare Programme mit oberen Schranken, statistische lineare Programme, lineare Programme mit Paramentern und die verbesserte Simplex-Methode. Manche Fragen, die den Mathematiker interessieren, werden hier in befriedigender Weise beantwortet.

N. Hofreiter, Wien

Ziffernrechenautomaten. (Elektronisches Rechnen und Regeln, Band 1, Ziffernrechenautomaten). Von *W. Kämmerer*. Zweite, unveränderte Auflage. Mit 156 Textabb., VIII, 303 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1960. Geb. DM 29.—.

Da programm-gesteuerte Rechenautomaten immer mehr Verwendung finden, so besteht ein großer Bedarf an Mathematikern, Physikern und Ingenieuren, die diese Anlagen bedienen können. Einführende Lehrbücher sind daher derzeit sehr erwünscht. Während viele Bücher auf spezielle Rechenanlagen ausgerichtet sind, wird diesem Lehrbuch das Prinzipielle unter weitgehender Abstraktion herausgearbeitet. Eine Übertragung der grundsätzlichen Ideen auf spezielle Maschinen bietet dann keine besonderen Schwierigkeiten. Das Buch ist ausführlich und leicht verständlich geschrieben. Es beginnt mit einem Kapitel über Algebra der Logik. Dann folgt das Rechnen mit Dualzahlen. Es werden die Schwierigkeiten geschildert, die beim Rechnen mit Automaten auftreten. Über Arbeitsweise und Struktur von programm-gesteuerten Rechenautomaten berichtet ein weiteres Kapitel. Hier werden auch einige viel verwendete Typen von Rechenautomaten besprochen. Die Physiker und Ingenieure wird die Beschreibung der wesentlichen Bauelemente besonders interessieren. Das letzte Kapitel ist der Programmierung gewidmet. Hier wird in didaktisch geschickter Weise stufenweise in die Probleme eingegangen. Im Vergleich zu anderen Büchern über Rechenautomaten wird der technische Aufbau stark betont. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten. Mit besonderer Berücksichtigung der Z 22. Von *F. R. Güntsch*. Mit zahlreichen Textabb., und 142 S. Berlin: Walter de Guyter & Co. 1960. Geb. DM 23.—.

Die Zuse-Maschine *Z* 22 ist in den deutschsprachigen Ländern weit verbreitet. Insbesondere besitzen mehrere Hochschulen der Deutschen Bundesrepublik diese Maschine. Daher werden viele Studenten gerade an dieser Maschine Gelegenheit haben, einige Praxis in der Programmierung zu erwerben. Die *Z* 22 zeichnet sich durch große Flexibilität aus, die es gestattet, die verschiedensten Programm-Techniken anzuwenden. Das vorliegende Buch ist keineswegs auf die *Z* 22 ausgerichtet. Sie findet nur besondere Berücksichtigung. Die meisten Überlegungen sind allgemein gehalten, also auf jede Maschinentype anwendbar. In dem Buch werden zahlreiche Programmbeispiele gegeben. Die Darstellung ist manchmal recht knapp. Sehr übersichtlich angeordnet sind die algorithmischen Formulierungen der numerischen Verfahren, die Flußdiagramme, die Speicheraufteilungen und die Maschinenprogramme. Das Buch bringt lineare und zyklische Programme,

Haupt- und Unterprogramme, Adressenänderungen, Umdeutung und Umrechnung von Programmen, Leseprogramme, Interncode und Externcode für die Z 22. *N. Hofreiter*, Wien

A Guide to Mathematical Tables. Von *A. V. Lebedev* und *R. M. Fedorova*. English edition prepared from the Russian by *D. G. Fry*. XLVI, 586 S. Oxford—London—New York—Paris: Pergamon Press. 1960. Geb. £ 5 5 s. net.

Mit Rücksicht auf die sehr große Anzahl von Werken, in denen mathematische Funktionen tabelliert sind, ist die Herausgabe eines Führers durch sie wünschenswert geworden. Dies ist nun über Auftrag der sowjetischen Akademie der Wissenschaft erfolgt. Das Buch besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil bringt eine Beschreibung der Tafelwerke nach Umfang und Genauigkeit, geordnet nach den mathematischen Gegenständen (algebraische und trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus, spezielle Integrale, Zylinder und Kugelfunktionen, Interpolation, wichtige Konstanten, Primzahlen). Der zweite Teil enthält ein Verzeichnis der Tafelwerke mit genauen Literaturangaben. Das Werk ist außerordentlich inhaltsreich, aber nicht vollständig, was auch gar nicht beabsichtigt war. *N. Hofreiter*, Wien

Siebenstellige Logarithmen der Fakultäten der Zahlen 0 bis 12000. Herausgegeben im Auftrage des Institutes für Maschinelle Rechentechnik an der Technischen Hochschule Dresden von *U. Bornitz* und *A. Schubert*. 51 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1960. Geb. DM 10.30.

Die Tabellen wurden über Aufforderung des Institutes für Mathematische Statistik an der Technischen Hochschule Dresden mit Hilfe eines digitalen elektronischen Rechenautomaten angelegt und sind nun erfreulicherweise einem größeren Kreis zugänglich gemacht worden. *N. Hofreiter*, Wien

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. Für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von *H. Schubert* und *R. Haussner*. (Sammlung Göschen: Band 81.) Dritte, neubearbeitete Auflage von *J. Erlebach*. 157 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Broschiert. DM 3.60.

Die zweite Auflage wurde in dieser Zeitschrift **50**, 3 (1942) besprochen. Die dritte Auflage stellt eine Neubearbeitung dar. Das Buch enthält Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000, Logarithmen der trigonometrischen Funktionswerte, Additions- und Subtraktionslogarithmen, Tafeln und Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln und noch eine Reihe kleinerer Tafeln. *N. Hofreiter*, Wien

Plane Elastic Systems. (Ergebnisse der angewandten Mathematik.) Von *L. N. Milne-Thomson*. Mit 76 Textabb., VIII., 211 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Brosch. DM 49.80.

Die Heranziehung des mächtigen Hilfsmittels der komplexen Variablen bei der Lösung von zweidimensionalen Problemen der Elastizitätstheorie erfolgte erstmalig 1902 in einer Arbeit von *L. N. G. Filon*. Während des letzten Krieges hielt der Autor Vorlesungen über derartige Probleme für das Offizierskorps der englischen Marine in Greenwich. Das Fehlen einer systematischen Darstellung dieses Zweiges der Elastizitätstheorie ließ in dem Autor den Plan eines solchen reifen und die Gelegenheit zur Ausführung ergab sich, als der Autor Mitglied des

mathematischen Untersuchungszentrums der USA-Armee wurde, dessen Direktor der bekannte Mathematiker *R. E. Langer* ist.

In einem einleitenden Kapitel werden die Grundlagen der ebenen Elastizitätstheorie mit Hilfe einer *Airy*schen Spannungsfunktion, in einem zweiten und dritten die zugehörigen Randwertprobleme formuliert und ihre Lösungsmethoden mit Hilfe komplexer Variabler diskutiert. In den folgenden Kapiteln 4—6 werden dann die verschiedenartigsten Probleme auf Grund der so gewonnenen Methoden durchgerechnet. Ein abschließendes Kapitel 7 berücksichtigt den Fall der Anisotropie und die Lösungsmöglichkeiten derartiger Probleme mit Hilfe moderner Rechenmaschinen. Die Brauchbarkeit des Buches wird dadurch erhöht, daß jedem Kapitel eine Reihe von instruktiven Aufgaben (insgesamt etwa 170) beigegeben sind. *Th. Sexl*, Wien

The Mathematics of Radiation Transfer. Von *I. W. Busbridge.* (Cambridge. Tracts in Mathematics and Mathematical Physics: No. 50.) VII, 143 S. Cambridge: At the University Press. 1960. Geb. 30/— net.

Die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes in Sternen wurde von *E. Hopf* im Jahre 1934 in einer Monographie auf Grund einer Integrodifferentialgleichung streng behandelt. Das Interesse an derartigen Betrachtungen wurde neu belebt durch die Tatsache, daß Probleme der Neutronendiffusion und der Temperaturwellen in festen Körpern zu den gleichen mathematischen Fragestellungen führten. Vorliegende Darstellung berücksichtigt alle seit dem Erscheinen des *Hopf*schen Buches erzielten Ergebnisse. Es beginnt mit der Aufstellung der strengen Transportgleichung in Form einer Integrodifferentialgleichung, deren Lösung auf die Lösung einer Integralgleichung zurückgeführt werden kann (Kap. 1—3). Daran schließt sich die Aufstellung der Gleichungen von *Milne* und eine Diskussion ihrer Lösungsmöglichkeiten auf Grund eines Iterationsverfahrens. (Kap. 4—6). Eine Zusammenstellung der Resultate für endliche Atmosphären findet sich in den Kap. 7—10, eine solche der noch ungelösten Probleme in einem Anhang. Besonders wertvoll ist auch das ausführliche Verzeichnis der Originalarbeiten am Schluß des Buches unter ausführlicher Berücksichtigung der russischen Arbeiten. *Th. Sexl*, Wien

Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. Von *M. Z. v. Krzywoblocki.* Mit einem Anhang von *Ph. Davis* und *Ph. Rabinowitz.* Mit 3 Textabb., X, 188 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Geb. S 312.—; DM 52.—; sfr. 53.20; $ 12.40; £ 4.8.6d.

Vorliegende Monographie stellt im wesentlichen den unveränderten Abdruck von vier zusammenfassenden Aufsätzen dar, die unter dem gleichen Titel im „Österreichischen Ingenieur-Archiv", Band VI (1952), S. 331—360; Band VII (1953), S. 336—370; Band VIII (1954), S. 237—263; und Band X (1956), S. 1—38 erschienen sind. Nur die Kap. XIII und XIV stellen zusätzliche Betrachtungen über „diabatische Strömungen" (Strömungen einer reibungslosen, nichtwärmeleitenden Flüssigkeit mit Wärmequellen und Senken im Strömungsfeld) dar, während das von *P. Davis* und *P. Rabinowitz* verfaßte Kap. XV ergänzende Betrachtungen über die Berechnung von Unterschallströmungen enthält.

In den Kap. I und II wird die Berechnung von Unterschallströmungen nach der *Bergman*schen Methode der linearen Integraloperatoren (Ansatz der Stromfunktion als unendliche Reihe, deren Entwicklungskoeffizienten Integrale darstellen) untersucht. Nach einer Herleitung der *Tschaplygin*schen Gleichung

wird die Grundlage der Methode genau untersucht sowie auch die Dualität, die zwischen der kompressiblen und der inkompressiblen Strömung besteht. Das Problem der Konvergenz der Reihenentwicklungen wird ebenfalls erörtert. Den Abschluß bildet eine kurze Darstellung der nach dem Vorschlag von *v. Mises* vereinfachten Druck-Dichte Beziehung.

In den Kap. III und IV wird die Überschallströmung und die „Transschallströmung" (Strömung in beiden Bereichen) nach der *Bergman*schen Methode untersucht. Zunächst wird der Operator genau erörtert, welcher sich aus der Verwendung der Riemannschen Funktion ergibt und dann wird auch die Frage des Konvergenzbereiches behandelt. In dem Kap. IV über Transschallströmung wird die Anwendung des Integraloperators der ersten und zweiten Art im Falle der exakten und der vereinfachten Inkompressibilitätsgleichung dargelegt.

In den Kap. V und VI werden axialsymmetrische Strömungen untersucht und die Methode der Approximation durch eine Folge von linearen Gleichungen untersucht. Daran schließt sich eine Erörterung des *Bergman*-Operators, der Singularitäten und eine Verallgemeinerung der *Blasius*schen Formel.

Die Kap. VII bis XII behandeln in kursorischer Weise andere in der Theorie der Strömungen kompressibler Flüssigkeiten verwendete Methoden, so z. B. Reihenentwicklungen nach Mach-Zahlen, Variationsmethoden etc. Daran schließt sich eine wertvolle Zusammenstellung von Formeln, Bezeichnungsweisen der verschiedenen Autoren über die drei Arten von Strömungen und eine Reihe von Beispielen.

Aus dieser nur kurzen Übersicht über den reichen Inhalt vorliegender Monographie dürfte ersichtlich sein, daß die Monographie für alle auf diesem Gebiet arbeitenden Forscher ein unentbehrliches Nachschlagwerk darstellt

Th. Sexl, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Der praktische Einsatz elektronischer Rechenautomaten

Einführung in die
Programmierung und den betriebswirtschaftlichen Einsatz
elektronischer Rechenautomaten

Von

Ernst P. Billeter

Leiter des Institutes für Automation und Professor für Statistik und Automation an der Universität Freiburg (Schweiz)

Mit 2 Textabbildungen und 40 Diagrammen. VI, 151 Seiten. Gr.-8°. 1961
Steif geheftet S 132.—, DM 22.—, sfr. 22.50, $ 5.25

Das hier angezeigte Buch soll den Leser in die Probleme und Methoden der Programmierung elektronischer Rechenautomaten oder elektronischer Datenverarbeitungssysteme einführen. Es beschränkt sich allerdings nicht auf das Gebiet der Programmierung, sondern es umfaßt auch die Fragen der Problemanalyse in der Unternehmung und vor allem die Prüfung der Programme mit Hilfe statistischer Methoden. Eine besondere Behandlung erfährt die automatische Programmierung, deren Bedeutung für den praktischen Einsatz solcher Geräte je länger je mehr zunimmt. Der Rechenautomat wird überdies nicht nur als Gerät zur Lösung bestimmter Probleme betrachtet, sondern auch aus der Perspektive der Kybernetik und Informationstheorie. Hier werden Zusammenhänge behandelt, die bisher unbeachtet geblieben sind. Als Folge davon wird der Rechenautomat als organischer Bestandteil des Informationsflusses innerhalb einer Unternehmung betrachtet, wodurch zwangsläufig das Gebiet der administrativen Automation oder Büro-Automation betreten wird. Nicht selten sind Mißerfolge beim Einsatz elektronischer Rechenautomaten in Unternehmungen darauf zurückzuführen, daß diese Zusammenhänge zu wenig beachtet worden sind. Dieses Buch möchte es dem Unternehmer ersparen, solche unliebsamen Erfahrungen machen zu müssen.

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung. — **Das Rechengerät.** Allgemeine Theorie des Informationsflusses; Der Rechenautomat im Lichte der Kybernetik. Analogie- und Digitalgeräte. Das Digitalgerät. (Allgemeines Prinzipschema: Die Eingabe; Die Verarbeitungseinheit; Die Ausgabe. Arbeitsweise: Quantität und Qualität; Zahlensysteme; Der Rechenvorgang; Abstimmung; Operationsweise.) — **Die Programmierung.** Die Hauptbegriffe. Systematik der Rechenautomaten bezüglich der Programmierung. Grundlagen der Programmierung. (Das Ablaufdiagramm und seine Symbolik. Programmierungstechniken. Die Fehlersuche. Die automatische Programmierung.) Die Ein- und Ausgabe. — **Die Problemverarbeitung.** Der Begriff der Automation. Grundsätze für den Einsatz von Rechenautomaten im Unternehmen. (Die Problem-Findung. Die Problem-Analyse. Die Programmierung. Die Vercodung. Einzel- oder Gemeinschaftsarbeit?) Die Einsatzkontrolle mit Hilfe der statistischen Qualitätsüberwachung. (Das Wesen der statistischen Qualitätsüberwachung.) Der Einsatz elektronischer Rechenautomaten im Unternehmen. — **Die mutmaßliche Entwicklung bezüglich des Baues und des Einsatzes elektronischer Rechenautomaten.** — Literaturverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Schwankungserscheinungen in Elektronenröhren

Von

Franz Ollendorff

Dipl.-Ing., Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h., Research Professor am Technion, Israel Institute of Technolcgy, Haifa
Fellow of the I. R. E. (America), Member of the I. E. E. (England)
Mitglied der Israelischen Akademie der Wissenschaften

Mit 144 Textabbildungen. XVI, 468 Seiten. Gr.-8°. 1961
Ganzleinen S 576.—, DM 96.—, sfr. 98.30, $ 22.85

(Technische Elektrodynamik, Band II: Innere Elektronik, Teil 3)

Früher erschienen vom selben Autor:

Elektronik des Einzelelektrons

Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955
Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, sfr. 99.30, $ 23.10

(Technische Elektrodynamik, Band II: Innere Elektronik, Teil I)

Elektronik freier Raumladungen

Mit 240 Textabbildungen. XII, 620 Seiten. Gr.-8°. 1957
Ganzleinen S 588.—, DM 98.—, sfr. 100.30, $ 23.35

(Technische Elektrodynamik, Band II: Innere Elektronik, Teil 2)

Berechnung magnetischer Felder

Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952
Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, $ 15.70

(Technische Elektrodynamik, Band I)

In Vorbereitung befinden sich:

Technische Elektrodynamik:

Band II: Innere Elektronik, Teil 4: **Kristallelektronik**

Band III: **Ionik**